

ОБРАЩЕНИЕ К ЧИТАТЕЛЮ

Дорогие друзья!

Мы рады снова встретиться с вами в 6 классе! Мы предлагаем учить математику уже в привычной для вас форме: вы сможете одновременно использовать учебник, учебные книги, практикумы, рабочие тетради, электронный образовательный ресурс.

Учебник 6 класса включает четыре темы: «Решение уравнений», «Делимость чисел», «Рациональные числа», «Система координат. Диаграммы. Симметрия». В тексте учебника *курсивным шрифтом* выделен важный материал, а *наклонным шрифтом* — обращения к ученику.

Напоминаем, что на полях учебника проставлены специальные значки, которые помогут вам оценить назначение текста учебника и направят вас на работу с другими учебными материалами:

запомнить важный материал

перейти к работе с учебной книгой и практикумом

выполнить задания из рабочей тетради

выполнить задания по ссылке на Интернет-ресурс

подготовить проект в качестве домашнего задания

обратить внимание на материал, важный для подготовки к итоговой аттестации

проверить свои знания



Обращение к читателю

Учебные книги (в 6 классе их две) написаны в виде сюжетных историй, в которых вы встретитесь со знакомыми вам героями. Учебная книга под названием «Делимость чисел» написана в виде детективного расследования (ведь в мире чисел много загадок!).

В учебной книге под названием «Рациональные числа» действует сказочный персонаж, который из своего царства десятичных дробей попал в новое для него царство обыкновенных дробей и занялся исследованием новых чисел.

Практикумы позволят вам потренироваться в решении задач, проверить свои знания, проявить свои творческие способности. Главное — вы научитесь не бояться трудностей, столкнувшись с новой или необычной задачей.

Рабочие тетради включают три раздела: «Тренируемся», «Находим закономерности», «Творим и исследуем». Вы сможете самостоятельно выбирать понравившиеся вам задания.

Электронный образовательный ресурс КИТ («Компетентность. Инициатива. Творчество») на портале www.school-collection.edu.ru позволит вам выбрать задания в соответствии с вашими интересами. Он содержит мультфильмы, учебные и развивающие игры, справочники и другие учебные материалы.

В конце учебного года мы предлагаем вам устроить математический праздник — Ярмарку (материал для Ярмарки вы найдёте в конце второй учебной книги). Удачи вам!

Авторы

§ 1. Действия с целыми числами и десятичными дробями

Вспомним основные правила выполнения действий с целыми числами и десятичными дробями, которые вы изучали в 5-м классе.

Десятичные дроби (положительные)

- Сложение и вычитание натуральных чисел и десятичных дробей выполняется **поразрядно**.

$$\begin{array}{r} \overset{1}{6} \overset{1}{8} 4 5 \\ + \quad 2 4 7 \\ \hline 7 0 9 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} \overset{\cdot}{2} 5,5 \\ - \quad 1 2,3 8 \\ \hline 1 3,1 2 \end{array} \quad \underline{2},\underline{5}4 + \underline{1},\underline{6} = \underline{4},\underline{1}4$$

(Объясните, как выполнено сложение или вычитание в каждом из этих примеров.)

- Чтобы найти произведение двух десятичных дробей, нужно:
 - умножить дроби, не обращая внимания на запятую (умножить, как натуральные числа);
 - сосчитать, сколько знаков после запятой в обоих множителях вместе;
 - в записи произведения отсчитать справа налево столько же знаков (приписав слева, если нужно, нули) и отделить их запятой.

$$0,3 \cdot 0,05 = 0,015 \quad 2,4 \cdot 0,5 = 1,20 = 1,2$$
$$\begin{array}{r} \times 3,4 7 \\ \quad 3 5 \\ \hline 1 7 3 5 \\ + 1 0 4 1 \\ \hline 1 2 1,4 5 \end{array}$$

(Объясните, как выполнено умножение в каждом из этих примеров.)

Повторение

- Чтобы умножить десятичную дробь на 10; 100; 1000; ..., нужно перенести в её записи запятую соответственно на одну, две, три, ... цифры вправо.

$$2,3456 \cdot 10 = 23,456$$

$$2,3456 \cdot 1000 = 2345,6$$

$$2,3456 \cdot 100\,000 = 234\,560$$

- Деление натурального числа или десятичной дроби на натуральное число выполняется поразрядно, начиная со старшего разряда. Как только заканчивается деление целой части, в частном ставится запятая.

(Объясните, как выполнено деление на натуральное число в следующих трёх примерах.)

$$\begin{array}{r} 7\,3\,4\,4 \overline{) 2\,4} \\ \underline{7\,2} \\ 1\,4\,4 \\ \underline{1\,4\,4} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5\,5,2 \overline{) 1\,2} \\ \underline{4\,8} \\ 7\,2 \\ \underline{7\,2} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,5 \overline{) 8} \\ \underline{3\,2} \\ 3\,0 \\ \underline{2\,4} \\ 6\,0 \\ \underline{5\,6} \\ 4\,0 \\ \underline{4\,0} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,5 \overline{) 3} \\ \underline{3} \\ 0\,5 \\ \underline{3} \\ 2\,0 \\ \underline{1\,8} \\ 2\,0 \\ \underline{1\,8} \\ 2\,0 \\ \dots \end{array}$$

- Чтобы разделить десятичную дробь на 10; 100; 1000; ..., нужно перенести в её записи (дополненной слева, если нужно, нулями) запятую соответственно

Действия с целыми числами и десятичными дробями

на одну, две, три, . . . цифры влево.

$$\underbrace{23,4}_{\text{цифры влево}}:10=2,34 \quad \underbrace{23,4}_{\text{цифры влево}}:100=0,234 \quad \underbrace{23,4}_{\text{цифры влево}}:1000=0,0234.$$

(Объясните, как применить это правило для деления натурального числа на 10; 100; 1000 и так далее. Приведите примеры.)

- Чтобы выполнить деление на десятичную дробь, нужно в записи делимого и делителя перенести запятую вправо на столько знаков (приписав, если нужно, нули), сколько их после запятой у делителя, а затем выполнить деление на натуральное число.

$$4,08 : 1,2 = 40,8 : 12 = \dots \quad 48 : 0,05 = 4800 : 5 = \dots$$

(Объясните, как переносились запятые в каждом из примеров. Завершите вычисления.)

Почему при переносе в записи делимого и делителя запятых на одно и то же количество знаков вправо, частное не изменяется?)

Положительные и отрицательные числа

- Чтобы сложить два числа с одинаковыми знаками, нужно поставить их общий знак и приписать сумму модулей.
- Чтобы сложить два числа с разными знаками и разными модулями, нужно поставить знак слагаемого с большим модулем и приписать к нему разность большего и меньшего модулей слагаемых.
- Сумма двух противоположных чисел равна 0.

$$-2,8 + (-1,6) = -4,4$$

$$-14,6 + 2,4 = -12,2$$

$$-5,7 + 10 = 4,3$$

$$8,1 + (-8,1) = 0$$

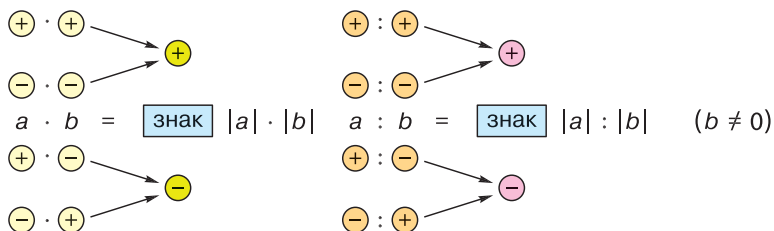
(Объясните, как получен результат в каждом из этих примеров.)

- Вычитание из одного числа другого можно заменить сложением уменьшаемого и числа, противоположного вычитаемому:

$$-24 - 35 = -24 + (-35); \quad 13 - (-8) = 13 + 8.$$

В числовых выражениях вида $14 - 56 + 38$; $-8 + 13 - 26 - 8$ знаки «+» и «-» можно считать не знаками действий, а знаками чисел, над которыми выполняется действие сложения.

- При умножении (делении) двух чисел с одинаковыми знаками произведение (частное) положительно, с разными знаками — отрицательно.



- Для любого числа a

$$a \cdot 0 = 0.$$

- Для любого числа a (кроме $a = 0$)

$$0 : a = 0 \quad (a \neq 0).$$

Делить на нуль нельзя!



Проверь себя

- Выполните действия:

- а) $12,6 + 3,74$; б) $-5,6 + 3,4$;
 в) $-1,8 - 2,9$; г) $14,5 - 43,5 - 8,6 + 57,1$;
 д) $2,3 \cdot 4,08$; е) $-13,104 : 2,6$;
 ж) $-3,4 \cdot (-6,07) \cdot 5,8 \cdot 0 \cdot (-1,12)$.

2. В каких случаях сумма двух чисел:
а) положительна, б) отрицательна?
Приведите числовые примеры.
3. В каком случае произведение двух положительных чисел меньше первого множителя? Приведите примеры.
4. В каких случаях произведение двух целых чисел меньше первого множителя? Приведите примеры.
5. Приведите примеры, когда при делении натуральных чисел получается:
а) натуральное число;
б) конечная десятичная дробь;
в) бесконечная периодическая десятичная дробь.
6. В каком случае частное двух положительных чисел больше делимого? Приведите примеры.
7. Найдите значение числового выражения:

$$-7,2 - 3,3 + 1,6 : (3,6 - (2,5 + 0,3)) + 4,5 - 2,2 : 1,1$$

Работаем с практикумом



Задание 1. Определите, значения каких выражений равны нулю, а в каких случаях числовое значение выражения найти нельзя:

- а) $\frac{(4,41 - 18,64 : 4) : 0,5 + 0,5}{20,5 \cdot 2,18 - 40}$;
- б) $(3,2 \cdot 22,5 - 72) : (-2,1 : 2 \cdot 0,2 + 0,21)$;
- в) $(-3,5 \cdot 1,24 + 4,34) : (-10 + 1,6 : 10,4 - 0,6 \cdot 0,4)$;
- г) $\frac{3,32 : 14,5 - 40 : 250}{(4,4 : 2 - 1,8) \cdot (-0,75) + 0,3}$.

Задание 2.

- 1) Найдите значение выражения

$$-6,4 \cdot 0,3 + 5,4 \cdot 0,3 - (200 - 3) : (-2).$$

1-й способ

$$\begin{aligned}
 & -6,4 \cdot 0,3 + 5,4 \cdot 0,3 - (200 - 3) : (-2) = \\
 & = -1,92 + 1,62 - 197 : (-2) = \dots
 \end{aligned}$$

2-й способ

$$\begin{aligned}
 & -6,4 \cdot 0,3 + 5,4 \cdot 0,3 - (200 - 3) : (-2) = \\
 & = (-6,4 + 5,4) \cdot 0,3 - (-100 + 1,5) = \dots
 \end{aligned}$$

Какие приёмы были использованы для упрощения вычислений?

2) Выполните действия:

а) $-2,25 + 0,75 : (0,8 \cdot 22,5 - 20,5)$.

б) $0,4 + 8,6 \cdot (0,021 : 0,01 - 2,6)$.

Задание 3. Вычислите устно:

а) $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \dots + 37 - 39 + 41$;

б) $-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \dots + 98 - 99$;

в) $100 - 101 + 102 - 103 + \dots - 199 + 200$.

Составьте свои примеры для устного счета.

§ 2. Буквенные выражения, уравнения

С помощью буквенного выражения можно записать решение множества задач, условия которых отличаются только числовыми данными. Например, для того чтобы найти периметр любого прямоугольника, можно использовать одно и то же буквенное выражение: $2 \cdot (a + b)$, где a и b — длины смежных сторон этого прямоугольника.

Буквенные выражения используются для записи формул. Например: $v = s : t$ — формула для нахождения скорости равномерного движения (v — скорость, s — пройденный путь, t — время).

При записи буквенных выражений принято во многих случаях не записывать («опускать») знак умножения. Например, при умножении числа на букву, двух букв, числа или буквы на выражение в скобках:

вместо $4 \cdot x$ можно записать $4x$,

вместо $a \cdot b$ можно записать ab ,

вместо $2 \cdot (a + b)$ можно записать $2(a + b)$,

вместо $(a + b) \cdot c$ можно записать $(a + b)c$.

Известные нам законы действий записываются с помощью равенств буквенных выражений, которые превращаются в верные числовые равенства при любых значениях входящих в них букв:

$$\begin{aligned}a + b &= b + a, & ab &= ba \\(a + b) + c &= a + (b + c), & (ab)c &= a(bc) \\(a + b)c &= ac + bc.\end{aligned}$$

Важную роль играют равенства, содержащие букву (буквы), для которых поставлена задача: найти такие значения буквы (букв), при которых получается верное числовое равенство. Такие равенства называются *уравнениями*.

Пока мы будем рассматривать только уравнения с одной буквой — уравнения с одной неизвестной. Чаще всего неизвестная обозначается буквой x , но можно использовать и другие буквы латинского алфавита.

Решим уравнение:

$$(5,1 - x) : 1,2 = 2,4.$$

Решение:

$$\begin{aligned} 5,1 - x &= 2,4 \cdot 1,2; \\ 5,1 - x &= 2,88; \\ x &= 5,1 - 2,88; \\ x &= 2,22. \end{aligned}$$

При $x = 2,22$ уравнение превращается в верное числовое равенство:

$$\begin{aligned} (5,1 - 2,22) : 1,2 &= 2,4; \\ 2,4 &= 2,4. \end{aligned}$$

Такие значения неизвестной называют *корнями уравнения*, то есть

$$2,22 \text{ — корень уравнения } (5,1 - x) : 1,2 = 2,4.$$

Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что корней нет.



Проверь себя

1. Собственная скорость моторной лодки равна a км/ч, скорость течения реки равна b км/ч. Запишите буквенные выражения для ответа на вопросы:
 - а) с какой скоростью будет плыть моторная лодка против течения;
 - б) во сколько раз собственная скорость лодки больше скорости течения;
 - в) какой путь пройдёт моторная лодка за 2 ч по течению;
 - г) какое расстояние проплывёт плот по реке за 3 ч;
 - д) какой путь пройдёт лодка, если будет плыть 1 ч по озеру, а затем полчаса против течения по реке?

2. Запишите буквенные выражения:

- а) сумма чисел x и y ;
- б) частное чисел a и c ;
- в) удвоенное произведение чисел x и y ;
- г) полуразность чисел a и c .

3. Найдите значение выражения $(a + 14,6) : (a - 2)$ при $a = -1,6$, при $a = 4$.

Объясните, почему нельзя найти значение этого выражения при $a = 2$.

4. Проверьте, является ли число $-3,6$ корнем уравнения $(x - 4,8) \cdot 1,5 = -12,6$?

5. Составьте уравнение, корнем которого будет число $1,5$.

6. а) Из формулы площади прямоугольника

$$S = a \cdot b$$

выразите длину стороны a .

б) Из формулы периметра прямоугольника

$$P = (a + b) \cdot 2$$

выразите длину стороны b .

Работаем с практикумом



Задание 1. Даны выражения:

- а) $(800 - 662,744) : (-9,632) - 1,993$;
- б) $(36,031 + 8,57 + 967,074) : (-0,246) + 3720,01$;
- в) $-30061030 : 5006 \cdot (-0,256) + 1437,29$.

Определите, значение какого числового выражения меньше, чем -90 .

Задание 2. Найдите значение выражения, если это возможно:

а) $\frac{a-b}{c+d}$ при $a = -2$, $b = -3$, $c = 2,5$, $d = -2,4$;

б) $\frac{k+n}{k-n}$ при:

1) $k = 5$, $n = -5$; 2) $k = 5$, $n = 5$; 3) $k = 0$, $n = 0$;

в) $\frac{|x|+x}{x}$ при $x = -6$; $x = -1$; $x = -2$; $x = 0$; $x = 1, 2$.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

ГЛАВА 2

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

§ 3. Приведение подобных слагаемых

Вы уже умеете решать некоторые уравнения, так как знаете о взаимосвязях между компонентами арифметических действий. То есть вы можете найти неизвестное слагаемое, неизвестное уменьшаемое, неизвестный множитель и так далее, если два других компонента действия известны.

Но уравнения могут иметь и другой вид:

1) $5x + 7x = -3,6$.

Нельзя найти неизвестное слагаемое только на основе связей между компонентами действий, потому что оба слагаемых неизвестны.

2) $x - 34 = 2x$.

Нельзя найти неизвестное уменьшаемое только на основе связей между компонентами действий, потому что разность тоже неизвестна.

3) $2(3x + 6) - 3(x - 5) = 18$.

В этом уравнении две пары скобок, неизвестное встречается дважды, и с чего начинать его решение, мы пока не знаем.

Итак, такие уравнения мы пока решить не можем. Нужно научиться преобразовывать их и приводить к удобному для решения виду. При этом преобразования должны «сохранять» корни уравнения.

Первое преобразование, которое мы научимся выполнять, — это *приведение подобных слагаемых*.

Нам поможет распределительный закон, только применять мы его будем «справа налево»:

$$a\textcircled{c} + b\textcircled{c} = (a + b)\textcircled{c}.$$

Посмотрите внимательно: левая часть равенства представляет собой сумму, в которой оба слагаемых имеют общий множитель c . Этот общий множитель *выносится за скобку*.

Но такое же преобразование можно применить и для суммы $5x + 7x$, вынеся за скобку общий множитель x :

$$5x + 7x = (5 + 7)x = 12x.$$

Рассмотрим ещё несколько примеров:

Пример 1. $3t - 8t$.

Это выражение можно считать суммой, и оба слагаемых этой суммы ($3t$ и $-8t$) имеют общий буквенный множитель t :

$$3t - 8t = (3 - 8)t = -5t.$$

Пример 2. $12y + y - 10y$.

У всех трёх слагаемых есть общий множитель y :

$$12y + 1y - 10y = (12 + 1 - 10)y = 3y.$$

В рассмотренных примерах мы смогли упростить суммы буквенных выражений благодаря тому, что все слагаемые этих сумм имели одинаковые буквенные части, отличались они только числовыми множителями. Такие слагаемые называются *подобными*. Например:

$$\begin{aligned} &5a; \quad -2,5a; \quad 0,3a; \\ &-2x; \quad 4,8x; \quad x; \end{aligned}$$



Числовые слагаемые (не содержащие буквенной части) также считаются подобными.



Сложение подобных слагаемых называют приведением подобных слагаемых.

Если в произведении только один числовой множитель, его называют *коэффициентом*. Например, в выражении $-5a$: -5 — коэффициент, a — буквенная часть.

Обычно приведение подобных слагаемых не записывают так подробно, как мы это делали в примерах 1 и 2, а пользуются правилом:



Чтобы сложить (привести) подобные слагаемые, нужно сложить их коэффициенты и умножить результат на общую буквенную часть.

$$6x + 8x = 14x; \quad -4a + 2a = -2a; \quad 7y - 9y - 12y = -14y.$$

Рассмотрим ещё несколько примеров:

Пример 3. $5x + 7 + 3a$.

В этой сумме нет подобных слагаемых, поэтому упростить её мы не можем.

Пример 4. $12x + 1 - 17x$.

Из трёх слагаемых только два являются подобными.

$$\underline{12x} + 1 - \underline{17x} = -5x + 1$$

Пример 5. $15a - 2b - 7b - 8a$

В этой сумме две пары подобных слагаемых.

$$\underline{15a} - \underline{2b} - \underline{7b} - \underline{8a} = 7a - 9b.$$

Пример 6. Решим уравнение:

$$5x + 7x = -3,6.$$

Решение:

$$12x = -3,6;$$

приведём подобные слагаемые в левой части,

$$x = -3,6 : 12;$$

найдем неизвестный множитель (для этого обе части уравнения делятся на коэффициент при x)

$$x = -0,3.$$

Ответ: $-0,3$.**Подведём итоги**

1. Произведения чисел и букв, которые отличаются только числовыми множителями, называются подобными выражениями.
2. Сумму подобных слагаемых можно упростить. Чтобы сложить (привести) подобные слагаемые, нужно сложить их числовые коэффициенты и умножить результат на общую буквенную часть.

Проверь себя

1. Занесите выражения

$$-4x; -4n; 5y; -2,5n; 18x; -0,6y; y; -x$$

в таблицу:

Буквенная часть	Подобные выражения

Назовите числовой коэффициент для каждого выражения. Можно ли включить в какую-то из этих групп подобных выражений число 18; выражение $25xy$?

2. На каком законе арифметических действий основано приведение подобных слагаемых?
3. Выберите суммы, в которых есть подобные слагаемые, и упростите их:
 - а) $-4x - 4x$; б) $12 + 8x$; в) $2,3y - 0,35 - 3,25y - 0,5$.
4. Найдите значение выражения $23x - 31x + 28x - 24x$ при $x = -15$.
5. Решите уравнение:

$$2x - 7x + 3x - 7x = 1,8.$$



Работаем с практикумом

Задание 1. Приведите подобные слагаемые:

- | | |
|------------------------------|---------------------------|
| а) $-7x + 9x - 3x + 2x$; | б) $2b - 4b + 3b - 11b$. |
| в) $-b + 5a - 7a + 3b + b$; | г) $9 + 6a - 3 - 10a$; |
| д) $a - 6a + 8a$; | е) $2,1a - 7,8a + a$; |
| ж) $0,5x - 0,3x + 5$; | з) $2a + 3 + 4a - 5$. |

Задание 2. Замените многоточия знаками арифметических действий так, чтобы получились равенства, верные при любых значениях x :

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| а) $3x \dots 5 \dots 2x = 5x + 5$; | б) $3x \dots 5 \dots 2x = -7x$; |
| в) $3x \dots 5 \dots 2x = x - 5$; | г) $3x \dots 5 \dots 2x = x + 5$; |
| д) $3x \dots 5 \dots 2x = 17x$; | е) $3x \dots 5 \dots 2x = 5x - 5$. |

Задание 3. Замените многоточие таким слагаемым, чтобы, чтобы при всех значениях x алгебраическое выражение $2x + 3x + \dots$ было равно:

- 1) $10x$; 2) $2x$; 3) 0 ; 4) 1 .

§ 4. Раскрытие скобок

Скобки в числовом или в буквенном выражении задают определённый порядок выполнения действий. Однако во многих случаях его можно изменить, сохранив при этом значение выражения.

Пример 1. На основе сочетательного закона сложения запишем равенство:

$$a + (b + c) = a + b + c.$$

Выражение, содержащее скобки, заменяется на равное выражение, но уже без скобок. В этом случае говорят — *раскрыли скобки*.

При помощи этого равенства раскроем скобки в нескольких числовых выражениях:

$$48 + (14 + 12) = 48 + 14 + 12,$$

$$48 + (-14 + 12) = 48 + (-14) + 12 = 48 - 14 + 12,$$

$$48 + (14 - 12) = 48 + (14 + (-12)) = 48 + 14 + (-12) = \\ = 48 + 14 - 12.$$

Посмотрите внимательно на результаты раскрытия скобок:

$$48 + (14 + 12) = 48 + 14 + 12,$$

$$48 + (-14 + 12) = 48 - 14 + 12,$$

$$48 + (14 - 12) = 48 + 14 - 12.$$

Они иллюстрируют общее правило:

Чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак «+», нужно, не записывая этот знак «+» и сами скобки (опустив знак и скобки), записать все слагаемые из скобок, сохраняя их знаки (при этом подразумевается, что слагаемое, записанное без знака, имеет знак «+»).



Пример 2. Ранее мы изучали свойства вычитания и среди них такое:

$$a - (b + c) = a - b - c.$$

Рассмотрим это свойство с другой точки зрения — как способ раскрытия скобок, перед которыми стоит минус.

Например:

$$56 - (16 + 32) = 56 - 16 - 32,$$

$$56 - (16 - 32) = 56 - (16 + (-32)) = 56 - 16 - (-32) = 56 - 16 + 32,$$

$$56 - (-16 + 32) = 56 - (-16) - 32 = 56 + 16 - 32,$$

$$56 - (-16 - 32) = 56 - (-16 + (-32)) = 56 - (-16) - (-32) = 56 + 16 + 32.$$

Проанализируем полученные результаты:

$$56 - (16 + 32) = 56 - 16 - 32,$$

$$56 - (16 - 32) = 56 - 16 + 32,$$

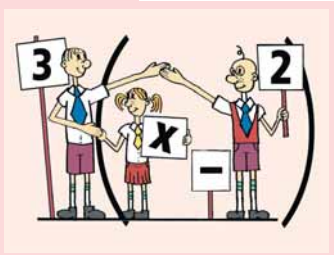
$$56 - (-16 + 32) = 56 + 16 - 32,$$

$$56 - (-16 - 32) = 56 + 16 + 32.$$

Они иллюстрируют общее правило:



Чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак «-», нужно, опустив этот знак «-» и скобки, записать все слагаемые из скобок с противоположными знаками.



Пример 3. Раскроем скобки в выражении $3 \cdot (x - 2)$.

Перед скобками стоит не просто знак «+» или «-», а числовой множитель.

Для раскрытия скобок воспользуемся распределительным законом умножения.

$$3 \cdot (x - 2) = 3 \cdot (x + (-2)) = 3 \cdot x + 3 \cdot (-2) = 3x - 6.$$

Пример 4. Раскроем скобки:

а) $-2 \cdot (5 + 4y)$; б) $-5 \cdot (3m - 1)$; в) $3 \cdot (-5 + 2x - 4y)$.

Решим эти примеры.

а) $-2 \cdot (5 + 4y) = -2 \cdot 5 + (-2) \cdot 4y = -10 - 8y$;

б) $-5 \cdot (3m - 1) = -5 \cdot 3m + (-5) \cdot (-1) = -15m + 5$;

в) $3 \cdot (-5 + 2x - 4y) = 3 \cdot (-5) + 3 \cdot 2x + 3 \cdot (-4y) = -15 + 6x - 12y$.

С помощью раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых можно упрощать довольно громоздкие выражения.

Пример 5. Упростим выражение $3(4x - 5) - 2(8x + 3)$.



$\begin{aligned} 3(4x - 5) - 2(8x + 3) &= \\ &= 3 \cdot 4x + 3 \cdot (-5) + (-2) \cdot 8x + (-2) \cdot 3 = \\ &= 12x - 15 - 16x - 6 = -4x - 21. \end{aligned}$	раскрыли скобки привели подобные слагаемые
--	--

Подведём итоги

1. Чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак «+», нужно, опустив этот знак «+» и скобки, записать все слагаемые из скобок, сохранив их знаки (при этом подразумевается, что слагаемое, записанное без знака, имеет знак «+»).
2. Чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак «-», нужно, опустив этот знак «-» и скобки, записать все слагаемые из скобок с противоположными знаками.
3. Чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит множитель, нужно умножить этот множитель на каждое слагаемое в скобках и записать сумму полученных результатов.



Проверь себя

1. Заполните пропуски:

а) $-(5 - 4y) = \dots 5 \dots 4y$;

б) $-(3x + 8) = \dots 3x \dots 8$;

в) $-(-2 + 5m - 6) = \dots 2 \dots 5m \dots 6$;

г) $-(3a - 4b) + (2c - 5d) = \dots 3a \dots 4b \dots 2c \dots 5d$.

2. Объясните, в чем особенность раскрытия скобок, перед которыми стоит отрицательный числовой множитель.



3. Раскройте скобки:

а) $4 \cdot (5x + 3)$; б) $-6 \cdot (2 + 4y)$; в) $-2 \cdot (7a - 1)$.

4. Заполните пропуски:

$$4(3x - 2y) - 2(5x - y) = \dots 12x \dots 8y \dots 10x \dots 2y = \\ = \dots x \dots y.$$



5. Решите уравнения:

а) $4(7 - x) + 2x = 13$; б) $2(3x + 6) - 3(x - 5) = 18$.

6. Найдите произведение $8 \cdot 999$ удобным способом.



Работаем с практикумом

Задание 1. Дано выражение

$$4(a - b) - 6a + 3b.$$

1) Упростите данное выражение.

2) Найдите его значение при $a = 5$, $b = 2$ двумя способами:

а) подстановкой значений букв в первоначальное выражение;

б) подстановкой значений букв в упрощённое выражение.

Одинаковые ли получились результаты?

Задание 2. Найдите ошибки, допущенные при раскрытии скобок:

- 1) $-(5x - 4) = -5x - 4$;
- 2) $-2(x + 3) = -2x + 6$;
- 3) $-2(3x - 2) = 6x - 2$;
- 4) $-(-5 - x) + 2(3 - 4x) = 5 - x + 6 - 4x$.

В каких случаях знак не был изменён на противоположный?

В каких случаях одно из слагаемых не было умножено на множитель, стоящий перед скобкой?

В каких случаях допущены какие-то другие ошибки?

Раскройте скобки во всех четырёх примерах правильно.

Задание 3. Замените в числовом выражении

$$-109 + (-32) - (+33) + 117 - 0:$$

а) вычитание сложением; б) сложение вычитанием, не изменяя значения числового выражения.

Задание 4. Найдите значение выражения:

- 1) $m - n + k$ при $m = -30$, $n = -82$, $k = 72$;
- 2) $(m + n) + (m - n)$ при $m = -21,6$, $n = 72,4$;
- 3) $m - n - (m - n)$ при $m = -21,6$, $n = 72,4$.

Задание 5. Поиграйте в «Математическое лото». Для каждой карточки I–VI найдите соответствующую карточку с буквой.



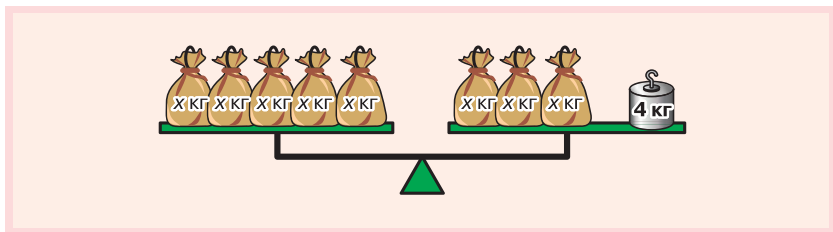
I. $5a - 3(a + 5)$	IV. $-13 + 8a + 2(13 - 3a)$				
II. $-52a - 26(b - 2a)$	V. $-14(2a + 3b) + 7(3a - 2b)$				
III. $6(b - 4) - 5$	VI. $-8a + 6b - 7(b - a)$				
A	Б	В	Г	Д	Е
$-7a - 56b$	$-29 + 6b$	$-26b$	$2a - 15$	$13 + 2a$	$-a - b$

§ 5. Решение уравнений

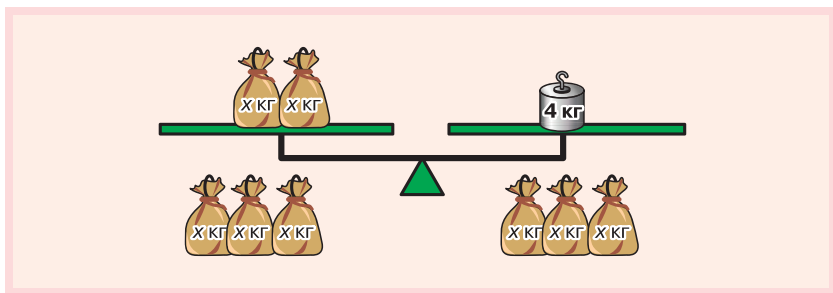
Рассмотрим уравнение: $5x = 3x + 4$.

Мы не можем его решить на основе знаний о связях между компонентами действий, так как неизвестная находится в обеих частях уравнения. Вот если бы суметь «удалить» слагаемое $3x$ из правой части!

Посмотрите на рисунок. Можно сказать, что это модель данного уравнения: одинаковые мешочки неизвестной массы (x), гиря массой 4 кг (число 4). Нужно подобрать такую массу мешочка (значение x), чтобы весы находились в равновесии (равенство было верным).



Модель подсказывает — если снять с обеих чашек весов по 3 мешочка, равновесие не нарушится.



Математически это означает следующее — можно вычесть из обеих частей уравнения $3x$ (прибавить

к обеим частям $-3x$). При этом «старое» уравнение и «новое» будут превращаться в верные числовые равенства при одних и тех же значениях x , то есть будут иметь одинаковые корни.

Итак, прибавим слагаемое $-3x$ к обеим частям уравнения $5x = 3x + 4$;

$$5x - 3x = 3x + 4 - 3x$$

$$5x - 3x = 4.$$

Теперь сравним два уравнения:

$$5x = 3x + 4 \quad \text{и} \quad 5x - 3x = 4.$$

Мы видим, что второе уравнение можно получить из первого, перенеся слагаемое $3x$ из правой части уравнения в левую, поменяв при этом его знак.

Продолжим решать уравнение:

$$5x - 3x = 4;$$

$$2x = 4;$$

$$x = 2.$$

Уравнение решено, оно имеет корень, равный 2.

Проверка:

$$5 \cdot 2 = 3 \cdot 2 + 4,$$

$$10 = 10. \quad \text{Верно.}$$

Таким образом, решая уравнение, мы перенесли слагаемое из одной части уравнения в другую с противоположным знаком. В результате все слагаемые, содержащие неизвестную, «собрались» в одной части.

Применим этот способ для решения другого уравнения.





Пример 1. Решим уравнение $3x - 6 = 10x + 8$.

Решение. Перенесём слагаемое $10x$ в левую часть уравнения с противоположным знаком:

$$3x - 6 - 10x = 8.$$

Теперь все слагаемые с неизвестной собраны в одной части уравнения — слева. Поступим так же и с числовыми слагаемыми — соберём их все в правой части уравнения. Для этого перенесём слагаемое (-6) в правую часть уравнения с противоположным знаком:

$$3x - 10x = 8 + 6.$$

Упростим левую и правую части уравнения:

$$-7x = 14.$$

Разделим обе части уравнения на -7 и получим:

$$x = -2.$$

Выполним проверку, подставив найденное значение в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-2) - 6 &= 10 \cdot (-2) + 8; \\ -12 &= -12. \end{aligned}$$

Верно.

Это же уравнение можно было решить по-другому.

$$3x - 6 = 10x + 8.$$

Соберём все слагаемые, содержащие неизвестную, справа, а числовые слагаемые — слева:

$$\begin{aligned} -6 - 8 &= 10x - 3x; \\ -14 &= 7x; \\ -2 &= x; \\ x &= -2. \end{aligned}$$

Ответ: -2 .



Пример 2. Решим уравнение $8(3 - 2x) = 9 - 7(2x + 5)$.

Решение:

$8(3 - 2x) = 9 - 7(2x + 5)$; раскроем скобки в обеих частях;
 $24 - 16x = 9 - 14x - 35$; перенесём слагаемые, содержащие неизвестную, влево, а числовые слагаемые — вправо, изменив их знаки на противоположные;

$-16x + 14x = 9 - 35 - 24$; приведём подобные слагаемые в обеих частях уравнения;

$-2x = -50$; разделим обе части уравнения на -2 .

$$x = 25.$$

Ответ: 25.

Пример 3. Решим уравнение $3(x - 2) = 3x + 4$.

Решение:

$$3x - 6 = 3x + 4;$$

$$3x - 3x = 4 + 6;$$

$$0 = 10.$$

Мы пришли к очевидно неверному числовому равенству. Получается, что ни при каком значении x исходное уравнение не превращается в верное равенство. Значит, уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

Пример 4. Решим уравнение $4x - 6 = 3(x - 2) + x$.

Решение:

$$4x - 6 = 3(x - 2) + x;$$

$$4x - 6 = 3x - 6 + x;$$

$$4x - 3x - x = -6 + 6;$$

$$0 = 0.$$

Мы пришли к очевидно верному числовому равенству. Получается, что при любом значении x исходное уравнение превращается в верное равенство. Значит, корнем уравнения будет любое число.

Ответ: любое число.

Подведём итоги

1. К обеим частям уравнения можно прибавить одно и то же число (любое), при этом полученное уравнение будет иметь те же корни, что и исходное.

2. Слагаемое можно перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, при этом полученное уравнение будет иметь те же корни, что и исходное.
3. Обе части уравнения можно разделить на одно и то же число (не равное 0), при этом полученное уравнение будет иметь те же корни, что и исходное.



Проверь себя

1. Заполните пропуски:

а) $3 + 9x = 15 - 8x;$

$\dots 9x \dots 8x = \dots 15 \dots 3.$

б) $12y - 4 = -27 - 8y;$

$\dots 12y \dots 8y = \dots 27 \dots 4.$

в) $53 - 10a = 30a - 8;$

$\dots 53 \dots 8 = \dots 10a \dots 30a.$

2. Составьте по рисунку уравнение

и решите его.

3. Решите уравнение: $x - 34 = 2x.$

4. Объясните каждый шаг в решении уравнения:

$$8(3 - 2x) = 16;$$

$$24 - 16x = 16;$$

$$-16x = 16 - 24;$$

$$-16x = -8;$$

$$x = 0,5.$$

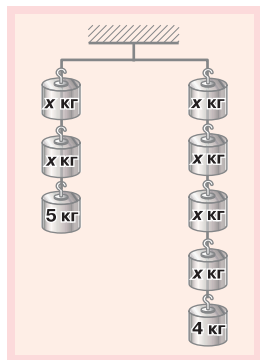
Решите это же уравнение другим способом так, чтобы не пришлось раскрывать скобки в левой части.

5. Составьте уравнение, при решении которого:

а) не нужно раскрывать скобки, но нужно переносить слагаемые из одной части в другую;

б) нужно и раскрывать скобки, и переносить слагаемые из одной части в другую.

Решите составленные уравнения.



**Работаем с практикумом**

Задание 1. Даны уравнения:

- 1) $x + 3 = 7$;
- 2) $x - 3 = 8$;
- 3) $4 = 9 - x$;
- 4) $5x - 3 = 17$;
- 5) $2x + 7 = 13$;
- 6) $20 - y = 13$;
- 7) $15(-5y + 4) = -3(13y + 4)$;
- 8) $2x - 18 = 3x + 2x - 6$;
- 9) $9x = 27$;
- 10) $5x + 7x = 36$;
- 11) $7y + 5,5 = 2y$;
- 12) $10x + 36 - 20x = 16$;
- 13) $3(16 - 3x) - 10(1 + x) = 0$;
- 14) $2z + 12 = z + 18$;
- 15) $19,1 - 2,4x - 10,4 = 2,4x + 3,9$;
- 16) $5 \cdot (9x - 10) = 40$;
- 17) $31 = 111 - x - 7x$;
- 18) $1,7(13 + 3x) - 0,3 = 1,4$;
- 19) $0 = 15 + x - 8x - 3x - 6x + x$;
- 20) $-0,617x - 0,617 = 1,234 + 1,234x$;
- 21) $3 \cdot (x - 2) = 4x - 6$;
- 22) $0,75x - 2x + 0,6x + 0,5x - 9 = 0$;
- 23) $44,44x = 2222 + 222,2 + 22,22 + 2,222$;
- 24) $x - (5 - x) = 3$;
- 25) $5(x - 2) = 2x - 4$;
- 26) $2(x - 3) - (x + 4) = 3(x - 4) - 2(x - 1)$;
- 27) $x - 5x + 7 = 2 - 4x$.

а) Распределите все эти уравнения по четырём группам:

- уравнения, в которых не надо ни раскрывать скобки, ни переносить слагаемые из одной части уравнения в другую;

- уравнения, в которых не надо раскрывать скобки, но надо переносить слагаемые из одной части уравнения в другую;
- уравнения, в которых надо обязательно раскрывать скобки, но не надо переносить слагаемые;
- уравнения, в которых надо и раскрывать скобки, и переносить слагаемые.

Решите уравнения каждой группы.

б) Есть ли в этом списке уравнения:

- которые не имеют корней;
- корнем которых является любое число?

в) Ответьте на следующие вопросы:

- Какие уравнения имеют один и тот же корень?
- Какие пары уравнений имеют противоположные корни?
- Корень какого из уравнений имеет наибольший модуль?
- Какое уравнение имеет наибольший отрицательный корень?



Задание 2. Составьте уравнение и решите его:

- 1) Из числа a вычли 3, полученную разность умножили на 2 и получили (-6) . Найдите число a .
- 2) Какое число надо вычесть из 5, чтобы произведение полученной разности и числа 5 было равно 5?
- 3) К какому числу надо прибавить 10, чтобы число увеличилось в три раза?
- 4) Ученик задумал число, умножил его на 2, к произведению прибавил 20, полученную сумму умножил на 2, из результата вычел 3 и получил 5. Какое число ученик задумал?

Составьте свою задачу про задуманное число.

ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

ГЛАВА 3

ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

§ 6. Деление нацело на множестве целых чисел



Мы умеем выполнять с целыми числами четыре арифметические операции: сложение, вычитание, умножение и деление. Все они взаимосвязаны друг с другом. Например, сравним сложение и умножение:

	Сложение	Умножение
<i>Результат для целых чисел</i>	При сложении двух любых целых чисел всегда получается целое число	При умножении двух любых целых чисел всегда получается целое число
<i>Законы</i>	$a + b = b + a$ $(a + b) + c = a + (b + c)$	$ab = ba$ $(ab)c = a(bc)$
	$(a + b)c = ac + bc$	
<i>Обратная операция</i>	<i>вычитание</i> $a - b = x$, если $x + b = a$	<i>деление</i> $a : b = x$, если $x \cdot b = a$ ($b \neq 0$)
<i>Результат обратной операции для целых чисел</i>	При вычитании двух любых целых чисел всегда получается целое число	!!!! При делении некоторых целых чисел целое частное не получается

(Приведите примеры, когда результат деления двух целых чисел — целое число, и примеры, когда результат — дробное число.)

Итак, между операциями сложения и умножения есть большое сходство, но при этом обратные для них операции имеют существенное отличие. Обратите внимание: разность любых целых чисел обязательно целое число, тогда как результат деления двух целых чисел не всегда является целым числом. Говорят, что *деление не всегда выполнимо на множестве целых чисел*.

Число 28 делится нацело на 4 (без остатка), так как есть целое число 7 такое, что $7 \cdot 4 = 28$.

А вот на число 5 нацело 28 не делится, так как нет такого целого числа x , чтобы $x \cdot 5 = 28$.

Обычно вместо слов «делится нацело», «делится без остатка» говорят просто «делится».

Можно записать это коротко:

$28 : 4$ (28 делится на 4),

$28 \not\vdots 5$ (28 не делится на 5).

При этом говорят, что 4 является делителем числа 28, а 5 не является делителем этого числа.

Для целых чисел a и b ($b \neq 0$) число b называется делителем числа a , если существует такое целое число c , что $a = bc$.

Например:

14 — делитель числа 28, так как существует целое число 2 такое, что $14 \cdot 2 = 28$;

−1 — делитель числа 28, так как существует целое число −28 такое, что $-1 \cdot (-28) = 28$.

(Запишите все натуральные делители числа 12. Выполняя это задание, не забудьте про особые делители: 1 и само число 12.)

Любое натуральное число делится на 1 и само на себя.)



Зная натуральные делители числа, легко выписать все его делители, так как



Если число b является делителем числа a , то число $-b$ также является делителем числа a .

Выполняя предыдущее задание, вы выписали натуральные делители числа 12:

1; 2; 3; 4; 6; 12.

Все делители числа 12:

1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4; 6; -6; 12; -12.

Подведём итоги

1. Деление не всегда выполнимо на множестве целых чисел.
2. Пусть a и b — целые числа ($b \neq 0$). Число b называется делителем числа a , если существует такое целое число c , что $a = bc$. В этом случае говорят, что число a делится на b нацело, без остатка.
3. Если число b является делителем числа a , то число $-b$ также является делителем числа a .
4. Любое натуральное число делится на 1 и само на себя.



Проверь себя

1. Что означает фраза: «Деление не всегда выполнимо на множестве целых чисел»?
2. Объясните, почему число 4 является делителем числа 36, а число 5 — нет.
3. Запишите все натуральные делители числа:
а) 8; б) 13; в) 1; г) 36.

4. Какое натуральное число является делителем любого целого числа? Какое целое число делится на любое натуральное число?
5. Объясните, почему неверно утверждение: «Любое натуральное число имеет по крайней мере два натуральных делителя: 1 и само это число».
6. Запишите несколько чисел, делителями которых являются:
а) 5; б) 2; в) 2 и 3.

Работаем с практикумом



Задание 1. Запишите по два трёхзначных и по два четырёхзначных числа, делящихся нацело на:

- а) 2; б) 10; в) 3; г) 6;
д) 9; е) 12; ж) 5; з) 18.

Задание 2. Назовите пять делителей числа:

- а) 346 170; б) 10.

Задание 3. Даны числа:

1540	86	25 000
2144	88	30 591

Укажите, какие из них делятся на:

- а) 2; б) 3; в) 5; г) 100.

§ 7. Признаки делимости



Представьте себе такую ситуацию.

На плацу находится группа солдат.

Группа стала строиться в колонну по двое.

Не получилось — один человек остался без пары.

Перестроим колонну — по трое в ряд. Опять один солдат остался в стороне.

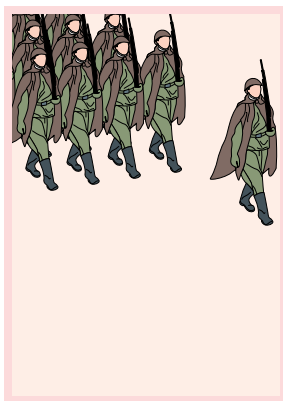
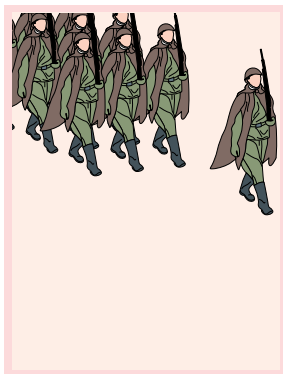
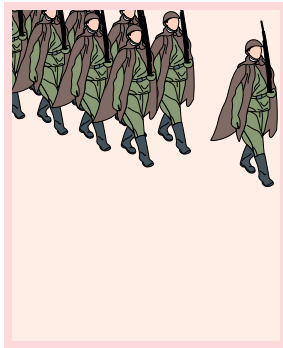
Попробуем ещё раз — по четыре в ряду. Снова один солдат остался вне строя!

И колонна по пять в ряду не получается. И если по шесть в ряду — опять один солдат оказывается лишним!

Опишем эту ситуацию на языке математики.

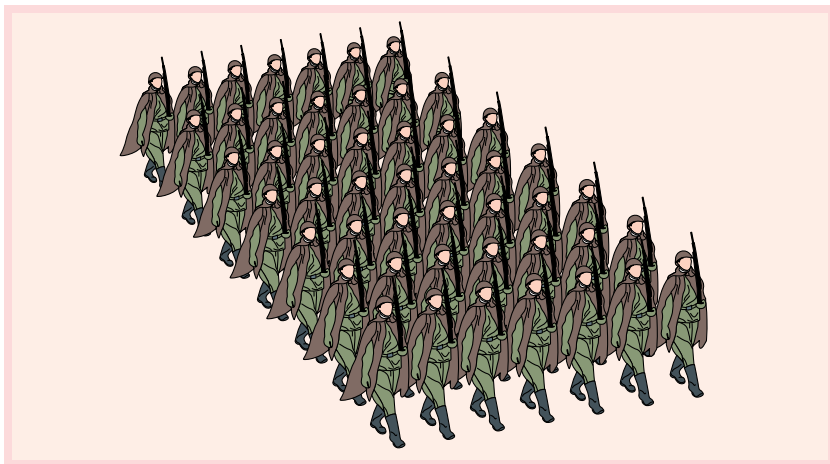
Число солдат не делится ни на 2, ни на 3, ни на 4, ни на 5, ни на 6. Возможно, это число вообще не имеет других натуральных делителей, кроме 1 и его самого?

С догадкой мы немного потропились. На самом деле в этой группе 49 солдат.



(Проверьте, что число 49 действительно не делится на 5 и даёт остаток 1 при делении на 2; 3; 4 и 6.)

Их можно построить в колонну по 7, ведь 49 делится на 7:



Однако если бы вместо числа 49 мы рассмотрели число 47, то сделали бы следующий вывод: 47 имеет только два натуральных делителя — числа 1 и 47.

Натуральные числа, которые имеют ровно два натуральных делителя (1 и само число), называются простыми числами.

Натуральные числа, которые имеют более двух натуральных делителей, называются составными.

Число 1 не является ни простым, ни составным.

(Проверьте, что числа 11 и 23 являются простыми, а число 15 — нет.)

Рассмотрим число 1875. Оно простое или составное? Как проверить, имеет оно только два натуральных делителя или больше? Неужели для этого нужно попробовать делить его на все числа от 2 до 1874?



Поставим цель — нам нужно научиться удобными способами находить делители числа. При этом упростим задачу — будем рассматривать только натуральные числа и только натуральные делители.

Проанализируем таблицу умножения и отметим в ней некоторые закономерности. Например, рассмотрим столбик (или строчку) для числа 2:

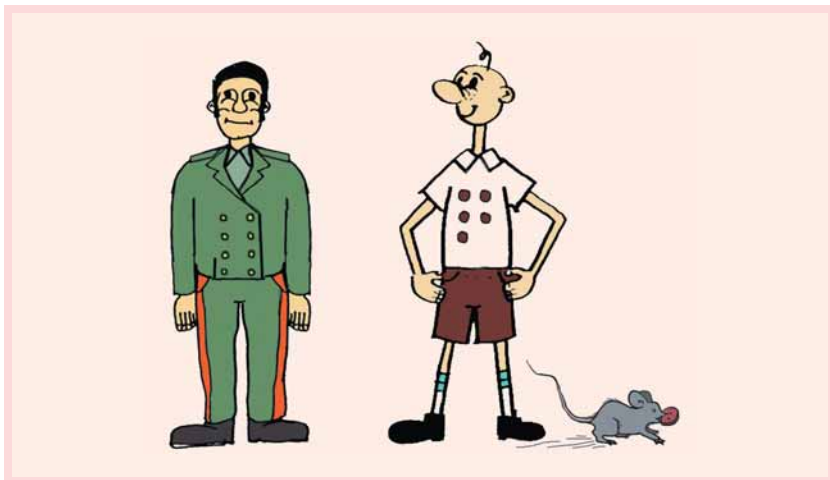
×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81



Если запись натурального числа оканчивается цифрой 0, 2, 4, 6 или 8, то это число делится на 2. И обратно: если число делится на 2, то его запись оканчивается цифрой 0, 2, 4, 6 или 8.

Это утверждение называют *признаком делимости на 2*. Оно даёт возможность по записи любого натурального числа сделать вывод — делится ли оно

на 2 или нет. Доказательства признаков делимости см. в § 9.



Целые числа, которые делятся на 2, называются *чётными*. Целые числа, которые не делятся на 2, — *нечётными*.

Любое чётное число можно представить в виде произведения числа 2 и некоторого целого числа, например:

$$\begin{aligned} 8 &= 2 \cdot 4, & 26 &= 2 \cdot 13, & 350 &= 2 \cdot 175, \\ 0 &= 2 \cdot 0, & -10 &= 2 \cdot (-5). \end{aligned}$$

Выражение $2n$, где n — любое целое число (принимает значения $0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots$), можно назвать формулой чётного числа.

Нечётные числа при делении на 2 дают остаток 1:

$$\begin{aligned} 9 : 2 &= 4 \text{ (ост. 1),} & \text{то есть } 9 &= 2 \cdot 4 + 1, \\ 53 : 2 &= 26 \text{ (ост. 1),} & \text{то есть } 53 &= 2 \cdot 26 + 1, \\ 111 : 2 &= 55 \text{ (ост. 1),} & \text{то есть } 111 &= 2 \cdot 55 + 1. \end{aligned}$$





Любое нечётное число можно задать формулой $2n + 1$, где n — целое число.

Вернёмся к рассмотрению числа 1875. В его записи последняя цифра 5, значит, это число нечётное, на 2 оно не делится.

Посмотрим ещё раз на таблицу умножения: последняя цифра 5 встречается только в столбике или в строчке для числа 5. Более того — все числа в столбике и строчке умножения на 5 оканчиваются или на 0, или на 5, а во всех других случаях последняя цифра произведения другая. Верен следующий признак делимости на 5:



Если запись натурального числа оканчивается цифрой 0 или 5, то это число делится на 5; и обратно: если число делится на 5, то его запись оканчивается цифрой 0 или 5.

Значит, $1875 : 5$, то есть 1875 не является простым числом.

Формула числа, которое делится на 5:

$5n$, где n — целое число:

$$10 = 5 \cdot 2; 165 = 5 \cdot 33; 0 = 5 \cdot 0; -45 = 5 \cdot (-9); \dots$$

Вы знаете ещё один признак делимости — на 10:

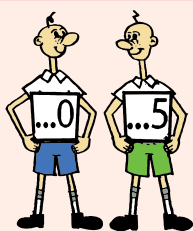


Если запись натурального числа оканчивается цифрой 0, то это число делится на 10.

И обратно: если число делится на 10, то его запись оканчивается цифрой 0.

Формула числа, которое делится на 10:

$10n$, где n — целое число.



Подведём итоги

1. Натуральные числа, которые имеют ровно два натуральных делителя (1 и само число), называются простыми числами. Натуральные числа, которые имеют больше двух натуральных делителей, называются составными числами. Число 1 не является ни простым, ни составным числом.
2. Если запись натурального числа оканчивается цифрой 0, 2, 4, 6 или 8, то это число делится на 2. И обратно: если натуральное число делится на 2, то его запись оканчивается цифрой 0, 2, 4, 6 или 8.
3. Целые числа, которые делятся на 2, называются чётными. Целые числа, которые не делятся на 2, — нечётными.
4. Если запись натурального числа оканчивается цифрой 0 или 5, то это число делится на 5. И обратно: если натуральное число делится на 5, то его запись оканчивается цифрой 0 или 5.
5. Если запись натурального числа оканчивается цифрой 0, то это число делится на 10. И обратно: если натуральное число делится на 10, то его запись оканчивается цифрой 0.

Проверь себя

1. Может ли простое число быть чётным?
2. Запишите все простые числа, меньшие 20.
3. Объясните, как, не выполняя непосредственно деления, узнать, делится ли число 3745 на 2? на 5?
4. Выберите из чисел: 234; 8100; 73; 125; 0; 9999; 13008:
 - а) числа, которые делятся на 2;
 - б) числа, которые делятся на 5;
 - в) числа, которые делятся на 10;
 - г) нечётные числа.





5. Докажите, что числа 248; 1000; 545 не являются простыми.

6. Какие из чисел 0, 1, 35, 43, 5942 имеют:
- а) только один натуральный делитель;
 - б) только два натуральных делителя;
 - в) больше двух натуральных делителей;
 - г) бесконечно много натуральных делителей?



7. Запишите формулу числа, которое:

- а) делится на 4;
- б) при делении на 5 даёт в остатке 3.



Работаем с практикумом

Задание 1.

- 1) Придумайте трёхзначное число:
- а) не делящееся на 5;
 - б) делящееся на 5, но не делящееся на 10.
(Сколько существует таких трёхзначных чисел?)

2) Существуют ли числа, делящиеся на 10, но не делящиеся на 5?

Задание 2. Может ли нечётное число делиться на чётное число? А чётное число делиться на нечётное? Приведите примеры.

Задание 3. Ученик выполнил сложение:

$$3548 + 7256 + 8108 = 18\,911$$

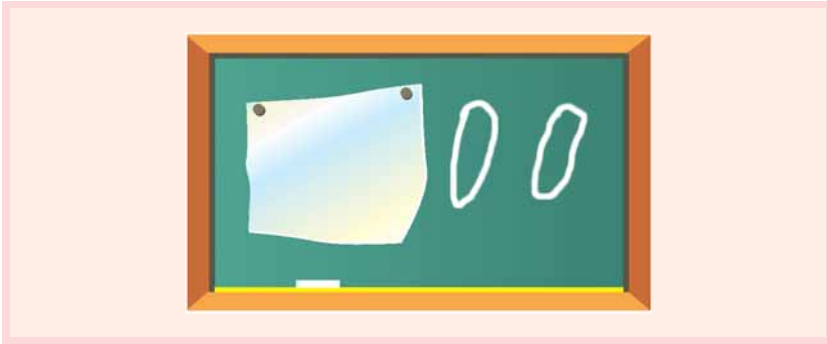
и

$$9756 + 8322 + 6565 = 24\,642.$$

Не проверяя промежуточных вычислений, учитель сразу сказал, что ученик ошибся при выполнении каждого примера. Как учитель это обнаружил?

§ 8. Делимость произведения

На доске записано четырёхзначное число, но первые две цифры закрыты:



Какими бы ни были закрытые цифры, мы знаем — это число делится на 100: оно представляет собой целое число сотен. Но также можно утверждать, что это число делится на 2, на 4, на 5, на 10, на 20, на 25 и на 50. Вы сомневаетесь? Давайте проверим.

Последняя цифра в записи этого числа 0, поэтому оно действительно делится на 2, на 5 и на 10. Но почему оно будет делиться на 4, 20, 25, 50?

Откроем спрятанные цифры.



Теперь можно проверить делимость на 4, 20, 25, 50, выполнив непосредственно деление. Однако попробуем рассуждать по-другому.

Число делится на 4, если его можно представить в виде $4n$, где n — целое число. Наше число делится на 100, а число 100, в свою очередь, делится на 4. Это можно записать так:

$$7800 = 78 \cdot 100 = 78 \cdot (4 \cdot 25) = 4 \cdot (78 \cdot 25),$$

значит, $7800 : 4$.

Число 100 ещё делится и на 20:

$$7800 = 78 \cdot 100 = 78 \cdot (20 \cdot 5) = 20 \cdot (78 \cdot 5),$$

значит, $7800 : 20$.

Так же можно обосновать делимость на 25 и 50:

Наверное, вы уже догадались, что вместо 78 могло быть любое число сотен. Обозначим их количество буквой a (a — натуральное число)

$$(a \cdot 100) : 4, \quad \text{так как } 100 : 4,$$

$$(a \cdot 100) : 20, \quad \text{так как } 100 : 20,$$

$$(a \cdot 100) : 25, \quad \text{так как } 100 : 25,$$

Эти примеры иллюстрируют *общее свойство делимости произведения*.



Если в произведении натуральных чисел хотя бы один множитель делится на некоторое число, то и всё произведение также делится на это число.

Если $b : c$, то $(a \cdot b) : c$ (a, b, c — натуральные числа).

Например:

$$33\,000 : 500, \quad \text{так как } 33\,000 = 33 \cdot 1000, \quad \text{а } 1000 : 500.$$

Подведём итоги

Если в произведении натуральных чисел хотя бы один множитель делится на некоторое число, то и всё произведение также делится на это число.

Проверь себя

1. Известно, что натуральное число делится на 20. Какие ещё натуральные делители обязательно имеет это число?
2. Запишите все натуральные делители числа:
а) $2 \cdot 3 \cdot 5$; б) $7 \cdot 15$.
3. Каким должно быть натуральное число a , чтобы число $6a$ делилось:
а) на 6; б) на 2?
4. Натуральное число a делится на 6 ($a > 6$). Запишите 9 натуральных делителей числа $7a$.
5. Выпишите все натуральные числа, на которые обязательно делится любое натуральное число, запись которого оканчивается тремя нулями.

**Работаем с практикумом**

Задание 1. Вставьте вместо * пропущенный множитель, если известно, что:

- а) $(127 \cdot * \cdot 2) : 7$; б) $(* \cdot 2 \cdot 7) : 14$; в) $(111 \cdot *) : 11$;
г) $(* \cdot 10000) : 9$; д) $(31 \cdot 12 \cdot *) : 6$.

Задание 2. К двузначному числу приписано такое же число. Может ли образовавшееся четырёхзначное число быть простым?

Задание 3. Докажите, что сумма двух любых последовательных нечётных чисел делится на 4.

Задание 4. Как можно записать в общем виде число, которое делится на 3? на 6? на 70?

§ 9. Делимость суммы

Вернёмся к одному из выводов, который мы получили в предыдущем параграфе:

Если запись натурального числа оканчивается двумя нулями, то это число делится на 4.



Можно ли это утверждение считать признаком делимости на 4?

Нет, потому что эта формулировка описывает только некоторые числа, делящиеся на 4, но далеко не все, например:

$24 : 4$, хотя запись не оканчивается двумя нулями,

$516 : 4$, хотя запись не оканчивается двумя нулями.

(Приведите примеры ещё нескольких трёхзначных чисел, которые делятся на 4 при том, что их запись не оканчивается двумя нулями.)

Попробуем разобраться, почему одни числа делятся на 4, а другие нет.

Рассмотрим примеры:

$$500 : 4; \quad 524 : 4; \quad 514 \not\div 4.$$

$500 : 4$, так как целое число сотен делится на 4.

Проанализируйте следующие записи:

$524 = 500 + 24$ оба слагаемых делятся на 4, и вся сумма делится на 4

$514 = 500 + 14$ одно слагаемое делится на 4, а другое нет, и вся сумма не делится на 4

Возможно, у вас появилось предположение (гипотеза): *если в сумме двух чисел каждое слагаемое делится на 4, то и вся сумма делится на 4.*

Попробуем убедиться в правильности такого предположения.

Сначала рассмотрим числовой пример:

$$\begin{aligned}500 : 4 \quad (500 = 4 \cdot 125), \quad 24 : 4 \quad (24 = 4 \cdot 6), \\ 500 + 24 = 4 \cdot 125 + 4 \cdot 6 = 4 \cdot (125 + 6),\end{aligned}$$

это значит, что сумма $500 + 24$ тоже делится на 4.

Теперь проведём те же рассуждения в общем виде (все буквы будут обозначать натуральные числа).

Пусть даны два натуральных числа a и b , каждое из которых делится на 4:

$$\begin{aligned}a : 4 \quad (a = 4 \cdot m), \quad b : 4 \quad (b = 4 \cdot n), \\ a + b = 4 \cdot m + 4 \cdot n = 4 \cdot (m + n).\end{aligned}$$

$m + n$ — натуральное число; это значит, что сумма $a + b$ тоже делится на 4.

Итак, гипотеза подтвердилась.

Можно доказать и другое утверждение: *если в сумме двух чисел одно слагаемое делится на 4, а другое — нет, то вся сумма не делится на 4.*

Применим эти утверждения о делимости суммы на 4 для ответа на вопрос о делимости числа на 4.

Пример 1. Делится ли 512 на 4?

Представим 512 в виде суммы, в которой одно из слагаемых точно делится на 4: $512 = 500 + 12$.

500 делится на 4 (как целое число сотен) и 12 делится на 4. Значит, их сумма также делится на 4: $512 : 4$.

Пример 2. Делится ли 7834 на 4?

$$7834 = 7800 + 34.$$

$7800 : 4$, $34 \not: 4$, значит, $7834 \not: 4$.

Пример 3. Делится ли 34 548 на 4?

$$34548 = 34500 + 48.$$

$34500 : 4$, $48 : 4$, значит, $34548 : 4$.

Легко заметить, что количество сотен в числе (5 сотен в первом примере, 78 во втором, 345 в третьем) не является существенным — делимость натурального числа на 4 зависит только от числа, образованного двумя последними цифрами в его записи.

Сформулируем *признак делимости на 4*:



На 4 делятся те и только те натуральные числа, в записи которых две последние цифры образуют число, которое делится на 4.

Например:

$618 \not: 4$, так как $18 \not: 4$;

$19\,324 : 4$, так как $24 : 4$.

Вместо числа 4 можно было рассмотреть любое другое натуральное число. Сформулируем общее утверждение о делимости суммы:



Если в сумме целых чисел каждое слагаемое делится на некоторое натуральное число, то и вся сумма делится на это число.

Докажем это утверждение (буквы a и b будут обозначать целые числа, а буква c — натуральное число):

если $a : c$ и $b : c$, то $a = c \cdot m$, $b = c \cdot n$, тогда $a + b = c \cdot m + c \cdot n = c \cdot (m + n)$.

$m + n$ — натуральное число, это значит, что сумма $a + b$ тоже делится на c .

Такое же доказательство можно провести для любого количества слагаемых.



Также верно следующее:

Если в сумме двух целых чисел одно слагаемое делится на некоторое натуральное число, а другое — нет, то вся сумма не делится на это число.

С помощью этих утверждений о делимости суммы мы можем обосновать признаки делимости, которые сформулированы в предыдущем параграфе.

Например, признак делимости на 5:

На 5 делятся те и только те натуральные числа, запись которых оканчивается цифрой 0 или 5.

Сначала рассмотрим числовой пример.

Обоснуем, почему 765 делится на 5.

Представим 765 в виде суммы целого числа десятков и однозначного числа единиц:

$$765 = 76 \cdot 10 + 5.$$

Первое слагаемое делится на 5 (так как множитель 10 делится на 5) и второе слагаемое — тоже. Значит, $765 : 5$.

Теперь повторим рассуждения в общем виде (все буквы обозначают натуральные числа или 0):

пусть в числе n содержится a десятков и b единиц, то есть

$$n = 10a + b,$$

первое слагаемое делится на 5, поэтому делимость всей суммы будет зависеть только от второго слагаемого: если $b : 5$, то и $n : 5$; если $b \not: 5$, то и $n \not: 5$.

Так как b — это однозначное число, то получаем вывод: $n : 5$ в том и только в том случае, когда $b = 0$ или $b = 5$.

Признак делимости на 5 доказан.

Подведём итоги

1. Если в сумме целых чисел каждое слагаемое делится на некоторое число, то и вся сумма делится на это число.
2. Если в сумме двух целых чисел одно слагаемое делится на некоторое число, а другое — нет, то вся сумма не делится на это число.
3. На 4 делятся те и только те натуральные числа, в записи которых две последние цифры образуют число, которое делится на 4.



Проверь себя

1. Объясните, почему сумма двух чётных чисел — чётное число, а сумма чётного и нечётного числа — нечётное. Используя формулу нечётного числа, докажите, что сумма двух нечётных чисел — чётное число.
2. Выберите из списка чисел 234; 9000; 1556; 924; 75314 те, которые делятся на 4.
3. Докажите в общем виде признак делимости на 2.
4. Докажите признак делимости на 8: «На 8 делятся те и только те натуральные числа, в записи которых три последние цифры образуют число, которое делится на 8».



Работаем с практикумом



Задание 1. Какое из чисел 24, 25, 26 можно подставить вместо * в сумму $2000 + *$, чтобы она делилась: а) на 5; б) на 4; в) на 8?
Ответы объясните.

Задание 2. Проверьте, верен ли такой признак делимости на 4: «Натуральное число делится на 4 тогда

и только тогда, когда сумма последней цифры и удвоенной предпоследней цифры делится на 4».

Задание 3. Докажите, что число 444...44, записанное только четвёрками (причём их может быть сколько угодно), не делится на 8.

§ 10. Признаки делимости на 3 и 9

О делимости числа на 2 и на 5 мы можем судить только по последней цифре в его записи, потому что все разрядные единицы, начиная с десятка (10; 100; 1000 и так далее), делятся на 2 и на 5.

О делимости числа на 4 мы можем судить по двум последним цифрам в его записи, потому что все разрядные единицы, начиная с сотни (100; 1000 и так далее), делятся на 4.

О делимости числа на 8 мы можем судить по последним трём цифрам в его записи, потому что все разрядные единицы, начиная с тысячи, делятся на 8.

Попробуем таким же способом получить признак делимости на 3. Найдём подходящую разрядную единицу:

$$\begin{aligned} 10 : 3 &= 3 \quad (\text{ост. } 1) \\ 100 : 3 &= 33 \quad (\text{ост. } 1) \\ 1000 : 3 &= 333 \quad (\text{ост. } 1) \\ 10\,000 : 3 &= 3333 \quad (\text{ост. } 1) \end{aligned}$$

Стоп! Кажется, продолжать этот ряд бессмысленно — и дальше каждая разрядная единица будет давать при делении на 3 в остатке 1. Что же получается? Путь, который до сих пор приводил нас к успеху, на этот раз завёл в тупик?

На самом деле, мы проделали полезную работу, и её результаты нам пригодятся.



Рассмотрим, например, число 5421. Делится ли оно на 3?

$$\begin{aligned} 5421 &= 5 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 1 = \\ &= 5 \cdot (999 + 1) + 4 \cdot (99 + 1) + 2 \cdot (9 + 1) + 1 = \\ &= (5 \cdot 999 + 4 \cdot 99 + 2 \cdot 9) + (5 + 4 + 2 + 1). \end{aligned}$$

Сумма в первых скобках делится на 3, так как каждое её слагаемое делится на 3 (*объясните, почему*). Значит, делимость числа 5421 на 3 будет зависеть только от того, делится ли на 3 сумма во вторых скобках:

$$5 + 4 + 2 + 1 = 12, \quad 12 : 3, \text{ значит, и } 5421 : 3.$$

Но обратите внимание — во вторых скобках оказалась сумма цифр исходного числа! То есть делимость числа 5421 на 3 зависела только от того, делится ли на 3 сумма его цифр!

Рассмотрим ещё одно число: 36 415.

$$\begin{aligned} 36\,415 &= 3 \cdot 10\,000 + 6 \cdot 1\,000 + 4 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 5 = \\ &= (3 \cdot 9\,999 + 6 \cdot 999 + 4 \cdot 99 + 1 \cdot 9) + \\ &\quad + (3 + 6 + 4 + 1 + 5). \end{aligned}$$

Сумма в первых скобках делится на 3, значит, делимость всего числа будет зависеть только от того, делится ли на 3 сумма во вторых скобках (а это сумма цифр исходного числа):

$$3 + 6 + 4 + 1 + 5 = 19, \quad 19 \not: 3, \text{ значит, и } 36\,415 \not: 3.$$

Подобные рассуждения можно повторить для любого натурального числа, с любым количеством цифр.

Сформулируем *признак делимости на 3*:



Натуральное число делится на 3 в том и только в том случае, если сумма его цифр делится на 3.

Например:

$$849 : 3, \quad \text{так как } 8 + 4 + 9 = 21, \quad \text{а } 21 : 3;$$

$$547 \not: 3, \quad \text{так как } 5 + 4 + 7 = 16, \quad \text{а } 16 \not: 3.$$

Таким же способом можно обосновать и *признак делимости на 9*:

Натуральное число делится на 9 в том и только в том случае, если сумма его цифр делится на 9.

Например:

$$849 \not: 9, \quad \text{так как } 8 + 4 + 9 = 21, \quad \text{а } 21 \not: 9;$$

$$567 : 9, \quad \text{так как } 5 + 6 + 7 = 18, \quad \text{а } 18 : 9.$$

Подведём итоги

1. Натуральное число делится на 3 в том и только в том случае, если сумма его цифр делится на 3.
2. Натуральное число делится на 9 в том и только в том случае, если сумма его цифр делится на 9.

Проверь себя

1. Какие изученные вами ранее математические законы помогли обосновать признак делимости на 3?
2. Сколько цифр в записи натурального числа нужно знать, чтобы определить, делится ли это число:
 - а) на 2; б) на 5; в) на 4;
 - г) на 8; д) на 3; е) на 9?
3. Выберите из чисел 241; 84; 4782; 123 456 789; 585 те, которые делятся:
 - а) на 3; б) на 9.
4. Какие цифры можно поставить на место * в записи числа 4712*, чтобы оно делилось:
 - а) на 2; б) на 5; в) на 4; г) на 9; д) на 6?





5. Объясните, почему, если число делится на 9, то оно делится и на 3.
6. Проверьте, будет ли верен изученный нами признак делимости на 2 для чисел, записанных в пятеричной системе счисления.

Работаем с практикумом

Задание 1. Какие из данных произведений делятся на 3:

- а) $6 \cdot 7 \cdot 11$; б) $8 \cdot 12 \cdot 17 \cdot 19$;
в) $2 \cdot 5 \cdot 13$; г) $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8$?

Задание 2. Запишите все такие тройки цифр, чтобы с их помощью можно было записать трёхзначное число, делящееся на 3. Зависит ли делимость числа на 3 от последовательности данных цифр в записи числа?

Выполните аналогичное задание для чисел, делящихся на:

- а) 9; б) 4.

Задание 3.

- 1) На рисунке 1 изображено множество натуральных чисел, разделённое на части. Объясните, из каких чисел состоит каждая часть этого множества.
- 2) По какому принципу разделено на части множество натуральных чисел на рисунке 2? В какую из частей попадут числа 9020, 327, 1321?

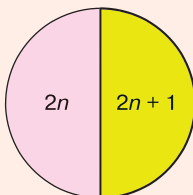


Рис. 1

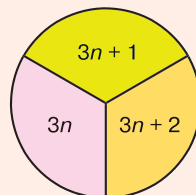


Рис. 2



Задание 4. Даны числа: 3 678, 14 580, 23 456 100, 798 240.

Какое из них делится на каждое из чисел: 2, 3, 4, 5, 6, 9 и 10?

§ 11. Разложение натурального числа на простые множители

В начале изучения темы «Делимость чисел» мы поставили перед собой основную цель: научиться находить все натуральные делители натурального числа. Теперь мы вооружены признаками делимости на многие числа, поэтому, наверное, легко справимся с такой задачей.

Возьмём для примера число 1694. Попробуем найти все его натуральные делители. Очевидно, его делителями являются 1 и 1694. С помощью признака определяем, что оно делится на 2.

Другой признак говорит, что на 3 это число не делится (сумма цифр 20), а значит, и на 9 оно делиться не будет.

И на 4 не делится (две последние цифры образуют число 94), а значит, делимость на 8 и проверять не стоит. И на 5 это число не делится.

Стоп! А что же делать дальше? Других признаков делимости мы не знаем. Может, у числа 1694 и нет других натуральных делителей, кроме 1, 2 и самого этого числа? Неужели, чтобы убедиться в этом, придётся проверять в качестве делителей все числа от 6 до 1693?

На самом деле у числа 1694 есть 12 натуральных делителей. И найти их можно более удобным способом, чем последовательный перебор. Для этого нужно научиться *раскладывать число на простые множители*.

Возьмём для начала число поменьше, например 280.

Это число легко представить в виде произведения (разложить на множители):

$$280 = 10 \cdot 28.$$



Можно продолжить, разложив на множители числа 10 и 28:

$$280 = 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7.$$

И ещё продолжим:

$$280 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7.$$

Обратите внимание, какие множители у нас получились: 5; 2; 7. Всё это — простые числа! В этом случае говорят, что выполнено *разложение натурального числа на простые множители*.

А если бы мы начали раскладывать на простые множители иначе, в итоге получился бы другой результат? Попробуем:

$$280 = 2 \cdot 140 = 2 \cdot 7 \cdot 20 = 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2.$$

Сравним результаты первого и второго вариантов. Три двойки, одна пятёрка, одна семёрка. Простые множители такие же, только записаны в другом порядке.

Можно доказать следующее утверждение:



Любое натуральное число, большее 1, единственным образом (с точностью до порядка множителей) раскладывается на простые множители (разложением простого числа на простые множители считается само это число).

Кстати, если бы 1 считалось простым числом, то у любого натурального числа было бы бесконечно много различных разложений на простые множители, например:

$$6 = 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = \dots$$

Это одна из причин, почему 1 не относят к простым числам.

Удобно использовать следующую форму записи разложения на простые числа, перебирая возможные

простые делители в порядке возрастания: 2; 3; 5; 7; 11; 13 и так далее:

$$\begin{array}{r|l}
 280 & 2 \\
 140 & 2 \\
 70 & 2 \\
 35 & 5 \\
 7 & 7 \\
 1 &
 \end{array}
 \quad 280 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$$

Теперь мы можем выписать все натуральные делители числа 280, перемножая его простые делители в разных сочетаниях:

$\boxed{1}$;

$\boxed{2}$; $\boxed{5}$; $\boxed{7}$

$2 \cdot 2 = \boxed{4}$; $2 \cdot 5 = \boxed{10}$; $2 \cdot 7 = \boxed{14}$; $5 \cdot 7 = \boxed{35}$;

$2 \cdot 2 \cdot 2 = \boxed{8}$; $2 \cdot 2 \cdot 5 = \boxed{20}$; $2 \cdot 2 \cdot 7 = \boxed{28}$; $2 \cdot 5 \cdot 7 = \boxed{70}$;

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = \boxed{40}$; $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = \boxed{56}$; $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = \boxed{140}$;

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = \boxed{280}$.

Всего 16 натуральных делителей.

Общее число натуральных делителей числа 280 можно было бы узнать другим способом:

$$280 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$$

множитель 2 можно не использовать, использовать один раз, два раза или три раза — 4 варианта;

множитель 5 можно не использовать или использовать один раз — 2 варианта;

множитель 7 можно не использовать или использовать один раз — 2 варианта;

всего вариантов $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, то есть 16 различных натуральных делителей.

Разложение числа на простые множители можно записывать более компактно, используя *степень*:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$$

степень 2^3 — показатель
 ↑
 основание

$$280 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \text{ или } 280 = 2^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1$$

2^3 — читается «два в третьей степени»; число 3 здесь показывает, что 2 берётся множителем 3 раза.

5^1 — первая степень числа равна самому числу: $5^1 = 5$.

Вернёмся к числу 1694. Теперь мы уже сможем найти все его натуральные делители.

Разложим это число на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 1694 & 2 \\ 847 & ? \end{array}$$

Признаки делимости подсказывают, что ни на 2, ни на 3, ни на 5 число 847 не делится. Следующее простое число: 7. Проверим обычным делением:

$$\begin{array}{r} 847 \overline{) 7} \\ - 7 \\ \hline 14 \\ - 14 \\ \hline 07 \\ - 7 \\ \hline 0 \end{array}$$

Итак, $847 : 7$.

$$\begin{array}{r|l} 1694 & 2 \\ 847 & 7 \\ 121 & ? \end{array}$$

Разложение натурального числа на простые множители

121 на 7 уже не делится, но зато его делителем является следующее простое число: 11.

$$\begin{array}{r|l} 1694 & 2 \\ 847 & 7 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Итак,

$$1694 = 2^1 \cdot 7^1 \cdot 11^2.$$

Всего это число будет иметь $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ натуральных делителей:

$$\boxed{1};$$

$$\boxed{2}; \boxed{7}; \boxed{11};$$

$$2 \cdot 7 = \boxed{14}; 2 \cdot 11 = \boxed{22}; 7 \cdot 11 = \boxed{77}; 11 \cdot 11 = \boxed{121};$$

$$2 \cdot 7 \cdot 11 = \boxed{154}; 2 \cdot 11 \cdot 11 = \boxed{242}; 7 \cdot 11 \cdot 11 = \boxed{847};$$

$$2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 11 = \boxed{1694}.$$

Подведём итоги

1. Любое натуральное число (большее 1) единственным образом раскладывается на простые множители с точностью до порядка множителей. Разложением простого числа на простые множители считается само это число.
2. Удобно раскладывать натуральное число на простые множители, перебирая возможные простые делители в порядке их возрастания: 2; 3; 5; 7; 11; 13 и так далее.



Проверь себя

1. Разложите число 60:
 - а) на два натуральных множителя;
 - б) на три натуральных множителя;
 - в) на простые множители.
2. Приведите примеры простых двузначных чисел. Объясните, почему числа 8; 12; 111 являются составными.
3. По разложению числа a на простые множители найдите все его натуральные делители: $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$.
4. Найдите все натуральные делители числа 2475.
5. Известно, что $a = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$. Какие из чисел 15; 18; 33; 48; 54 являются делителями числа a ?
6. Объясните, что значит утверждение: «Любое натуральное число (больше 1) единственным образом раскладывается на простые множители с точностью до порядка множителей».



Работаем с практикумом

Задание 1. Покажите, что число 496 равно сумме всех своих натуральных делителей, не равных ему самому (такие числа называют *совершенными*). Найдите совершенное число в первом десятке натуральных чисел.

Задание 2. Вычислите устно:

- а) $(3 \cdot 5 \cdot 7) : 3$;
- б) $340 : (2 \cdot 5 \cdot 17)$;
- в) $340 \cdot 23 : (2 \cdot 5 \cdot 17)$.

Задание 3.

- 1) Произведение трёх последовательных натуральных чисел равно 210. Найдите эти числа.

- 2) Произведение трёх последовательных нечётных чисел равно 105. Найдите эти числа.
- 3) Составьте задачу, аналогичную двум предыдущим.

§ 12. Простые числа

Найдём натуральные делители числа 991.

Будем перебирать простые числа в порядке возрастания, пробуя их на роль делителей этого числа:

$$2; 3; 5; 7; 11; 13; \dots$$

Признаки делимости показывают, что ни на 2, ни на 3, ни на 5 число 991 не делится;

$$991 : 7 = 141 \text{ (ост. 4);}$$

$$991 : 11 = 90 \text{ (ост. 1);}$$

$$991 : 13 = 76 \text{ (ост. 3).}$$

Делители пока не находятся. Чтобы продолжить поиски, нужны следующие простые числа. Откуда их брать? И что делать, если вдруг простые числа закончатся?

Ответим сначала на второй вопрос.

Более двух тысяч лет назад древнегреческий учёный Евклид доказал, что список простых чисел никогда не заканчивается — *простых чисел бесконечно много*.

Теперь вернёмся к первому вопросу и пополним запас известных нам простых чисел. Например, определим все простые числа в пределах первой сотни. Воспользуемся удобным способом, который называется *решето Эратосфена*.



Выпишем все натуральные числа от 1 до 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Вычеркнем 1 — единственное натуральное число, которое не является ни простым, ни составным.

Следующее число 2 — простое, обведём его и затем вычеркнем каждое второе число, то есть все числа (кроме 2), делящиеся на 2.

Первое невычеркнутое число 3 — простое, обведём его и затем вычеркнем каждое третье число, то есть числа, делящиеся на 3 (при этом некоторые числа окажутся вычеркнутыми дважды).

Теперь первым невычеркнутым, то есть простым числом, окажется число 5.

Продолжим работу. Вычеркнем каждое пятое число после пяти — первым невычеркнутым окажется 7.

Вычеркнем каждое седьмое число после семи — первым невычеркнутым окажется 11.

Вычеркнем каждое одиннадцатое число после одиннадцати. . . Стоп! Нам больше нечего вычёркивать, так как все числа после 11, которые делятся на 11, уже вычеркнуты на предыдущих шагах. Осталось только

обвести все числа, оставшиеся невычеркнутыми, — они являются простыми:

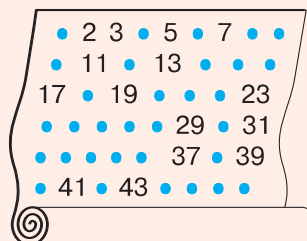
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Итак, наш список простых чисел пополнился:

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41;
43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97; ...

Мы можем продолжить работу
с числом 991:

$$\begin{aligned} 991 : 17 &= 58 \text{ (ост. 5);} \\ 991 : 19 &= 52 \text{ (ост. 3);} \\ 991 : 23 &= 43 \text{ (ост. 2);} \\ 991 : 29 &= 34 \text{ (ост. 5);} \\ 991 : 31 &= 31 \text{ (ост. 30);} \\ 991 : 37 &= 26 \text{ (ост. 29).} \end{aligned}$$



Неполное частное стало меньше делителя, поэтому пробовать на роль делителей простые числа, большие 37, не имеет смысла. С этим фактом мы уже встретились при составлении таблицы.

Итак, у числа 991 нет других натуральных делителей, кроме 1 и самого этого числа! Число 991 — простое.

А найдутся ли простые числа между 97 и 991? Можно применить «решето Эратосфена» для чисел от 1 до 1000 так же, как мы это сделали для чисел первой сотни, но мы воспользуемся готовой таблицей простых чисел из первой тысячи:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107
109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181
191	193	197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521
523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659	661	673	677	683	691	701
709	719	727	733	739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887
907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

Таким образом, в первой тысяче натуральных чисел 168 простых чисел.

Подведём итоги

1. Не существует самого большого простого числа. Простых чисел бесконечно много.
2. Выбрать простые числа из списка натуральных чисел от 1 до некоторого числа можно с помощью метода «решето Эратосфена».

**Проверь себя**

1. Как можно проверить, является ли некоторое натуральное число простым?
2. Сколько простых чисел в первом десятке натуральных чисел? в первой сотне? в первой тысяче?
3. Запишите, сколько простых чисел в каждой сотне из первой тысячи натуральных чисел (пользуясь таблицей простых чисел).
4. Если из двух простых чисел одно больше другого на 2, такие простые числа называются числами-близнецами. Выпишите все пары чисел-близнецов из первой тысячи натуральных чисел (пользуясь таблицей простых чисел).

Работаем с практикумом

www

Задание 1.

- 1) Почему все простые числа, кроме 2, нечётные?
- 2) О натуральном числе a известно, что оно кратно 3. Можно ли утверждать, что a — составное число?

Задание 2.

- 1) Даны выражения:

а) $2 \cdot 3 + 1$;

б) $2 \cdot 3 + 2$;

в) $2 \cdot 3 \cdot 5 + 5$;

г) $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$;

д) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$;

е) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1$;

ж) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1$;

з) $59 \cdot 509$;

и) $13 \cdot 23$;

к) $17 \cdot 31$.

Запишите эти выражения в два столбика так, чтобы в один столбик попали выражения, значения которых являются простыми числами, а в другой столбик — те выражения, значения которых — составные числа.

ГЛАВА 4

НОД И НОК

§ 13. Наибольший общий делитель

Решим задачу.

В одном из отрядов в летнем детском лагере 18 девочек и 24 мальчика. На какое наибольшее число команд для спортивной игры можно разбить этот отряд, если в каждой команде должно быть одно и то же количество девочек и одинаковое количество мальчиков?

Так как девочек во всех командах должно быть поровну, то число всех девочек должно делиться нацело на число команд. То же самое должно быть и для числа всех мальчиков.

Значит, и 18, и 24 должны делиться на число команд. Иначе говоря, число команд — это *общий делитель* чисел 18 и 24.

Запишем все натуральные делители для числа 18 и для числа 24, а потом выберем из обоих списков общие числа.

Натуральные делители числа 18:

1; 2; 3; 6; 9; 18.

Натуральные делители числа 24:

1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24.

Общие делители чисел 18 и 24:

1; 2; 3; 6.

Итак, при заданных условиях можно сформировать 1, 2, 3 или 6 команд. Наибольшее число команд равно 6.

Решая задачу, мы нашли *наибольший общий делитель* чисел 18 и 24.



Наибольшее натуральное число, на которое делится каждое из данных натуральных чисел, называется наибольшим общим делителем этих чисел.

Принято обозначение: $\text{НОД}(18; 24) = 6$.

Найдём $\text{НОД}(12; 24)$. Особенностью этих двух чисел является то, что одно из них делится на другое: $24 : 12$, поэтому $\text{НОД}(12; 24) = 12$.

Этот пример иллюстрирует правило:



Если одно из двух натуральных чисел делится нацело на другое, то их наибольший общий делитель равен меньшему из этих чисел:

если $a : b$, то $\text{НОД}(a, b) = b$.

Рассмотрим ещё один пример — найдём $\text{НОД}(13; 29)$. Особенностью этих двух чисел является то, что оба они простые, поэтому $\text{НОД}(13; 29) = 1$.



Наибольший общий делитель двух различных простых чисел равен 1.

Однако не только простые числа могут иметь наибольший общий делитель, равный 1. Например, легко убедиться, что $\text{НОД}(10; 9) = 1$, $\text{НОД}(6; 25) = 1$.



Натуральные числа, наибольший общий делитель которых равен 1, называют взаимно простыми.

То есть 13 и 29; 10 и 9; 6 и 25 — пары взаимно простых чисел.

Рассмотрим на примере, как можно найти наибольший общий делитель двух произвольных натуральных чисел.

4 НОД и НОК

Найдём НОД(945; 126).

Разложим каждое число на простые множители:

945		3	126		2
315		3	63		3
105		3	21		3
35		5	7		7
7		7	1		
1					

$$945 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7, \quad 126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7.$$

Множитель 3 входит в разложение обоих чисел, поэтому 3 будет общим делителем чисел 945 и 126:

$$945 = \underline{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7, \quad 126 = 2 \cdot \underline{3} \cdot 3 \cdot 7.$$

Множитель 3 встречается ещё раз в обоих разложениях, поэтому число $3 \cdot 3$ (9) также будет общим делителем чисел 945 и 126:

$$945 = \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7, \quad 126 = 2 \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 7.$$

В обоих разложениях есть ещё один общий множитель — число 7:

$$945 = \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \underline{7}, \quad 126 = 2 \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{7},$$

значит, $3 \cdot 3 \cdot 7$ (63) также будет общим делителем чисел 945 и 126.

Все остальные простые множители в разложениях чисел 945 и 126 различны, поэтому мы нашли не просто общий делитель этих двух чисел, а наибольший общий делитель (НОД):

$$\text{НОД}(945; 126) = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 63.$$

Если бы одинаковых простых множителей в разложениях данных чисел не оказалось, их наибольший общий делитель был бы равен 1.

Например:

$$54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3; \quad 175 = 5 \cdot 5 \cdot 7.$$

$$\text{НОД}(54, 175) = 1.$$

Если разложение данных чисел на простые множители записать с помощью степеней, можно определить наибольший общий делитель следующим образом:

$$945 = \underline{3}^3 \cdot 5^1 \cdot \underline{7}^1; \quad 126 = 2^1 \cdot \underline{3}^2 \cdot \underline{7}^1;$$

из степеней с одинаковыми основаниями, которые входят в разложения данных чисел на простые множители, выбрать степени с наименьшими показателями и найти произведение выбранных степеней (если в разложениях данных чисел нет степеней с одинаковыми основаниями, наибольший общий делитель равен 1):

$$\text{НОД}(945; 126) = 3^2 \cdot 7^1 = 9 \cdot 7 = 63.$$

Обратите внимание на важную особенность: если разделить каждое из двух чисел на их наибольший общий делитель, полученные частные будут взаимно простыми числами.

$$945 = \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \underline{7}; \quad 126 = 2 \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{7};$$

$$\text{НОД}(945; 126) = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 63;$$

$$945 : 63 = (\underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \underline{7}) : (\underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{7}) = 3 \cdot 5 = 15;$$

$$126 : 63 = (2 \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{7}) : (\underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{7}) = 2;$$

$\text{НОД}(15; 2) = 1$, то есть числа 15 и 2 взаимно простые.

Подведём итоги

1. Наибольший общий делитель нескольких натуральных чисел — это наибольшее натуральное число, на которое делится каждое из данных чисел.
2. Если одно из двух натуральных чисел делится нацело на другое, то их наибольший общий делитель равен меньшему из этих чисел:

$$\text{если } a : b, \text{ то } \text{НОД}(a, b) = b.$$

3. Натуральные числа, наибольший общий делитель которых равен 1, называют взаимно простыми.

4 НОД и НОК

4. Чтобы найти наибольший общий делитель двух натуральных чисел, нужно разложить эти числа на простые множители, выделить одинаковые для обоих разложений множители и найти их произведение (если одинаковых простых множителей в разложениях данных чисел нет, наибольший общий делитель равен 1).
5. Если разделить каждое из двух натуральных чисел на их наибольший общий делитель, полученные частные будут взаимно простыми числами



Проверь себя



1. Найдите:
а) $\text{НОД}(32; 56)$; б) $\text{НОД}(72; 36)$; в) $\text{НОД}(58; 75)$.
2. Верно ли, что для любых двух натуральных чисел можно найти их наибольший общий делитель?
3. Объясните, как найти наибольший общий делитель трёх натуральных чисел?
4. Могут ли два чётных числа быть взаимно простыми?
5. Может ли наибольшим общим делителем двух натуральных чисел быть:
а) 1;
б) одно из этих чисел;
в) число, большее одного из данных чисел?



Работаем с практикумом



Задание 1. Найдите $\text{НОД}(a, b, c)$, если:

- а) $a = 3^2 \cdot 5^3$, $b = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $c = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 11^2$;
- б) $a = 11 \cdot 17^2 \cdot 37$, $b = 11^3 \cdot 17 \cdot 31$, $c = 11^2 \cdot 17^5 \cdot 71$.



Задание 2. Найдите:

- 1) $\text{НОД}(147, 504, 1197)$; 2) $\text{НОД}(696, 1674, 1024, 2048)$;
- 3) $\text{НОД}(63, 27, 54, 99, 91)$.



Задание 3. На празднике вручали одинаковые букеты из белых и жёлтых роз. Какое наибольшее число таких букетов могло быть составлено, если известно, что для этого было 60 белых и 80 жёлтых роз. Сколько белых и сколько жёлтых роз было в каждом букете?

Задание 4.

$\text{НОД}(11, 13) = 1$, $\text{НОД}(13, 15) = 1$, $\text{НОД}(35, 37) = 1$,
 $\text{НОД}(37, 39) = 1, \dots$

Продолжите этот ряд. Какую закономерность вы подметили?

§ 14. Наименьшее общее кратное

Рассмотрим ещё одно понятие, связанное с делимостью чисел.



Для целых чисел a и b число a называется кратным числу b , если a делится на b нацело.

Например, натуральные числа, кратные 5, — это 5; 10; 15; 20; ...

Если мы разложим два натуральных числа на простые множители, то сразу увидим, будет ли одно из них кратно другому.

Например:

$$a = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7, \quad b = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7.$$

Число a кратно числу b , так как все множители из разложения числа b входят в разложение числа a (разложение числа b полностью содержится в разложении числа a).

$$c = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7, \quad d = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7.$$

Число c не делится на число d , так как разложение числа d не содержится полностью в разложении числа c — одного множителя 3 не хватает.

Рассмотрим задачу.

В магазине рассыпалось несколько коробок карандашей по 10 штук в каждой. После того, как эти карандаши собрали, все их упаковали в другие коробки по 12 штук в каждой. Сколько карандашей рассыпалось?

По условию задачи число карандашей должно делиться на 10 (быть кратным 10) и на 12 (быть кратным 12). Таким образом, нам нужно найти такое натуральное число, которое будет общим кратным чисел 10 и 12.

Мы не можем выписать все натуральные числа, кратные 10, — их бесконечно много:

10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90; 100; 110; 120 ...

И натуральных чисел, кратных 12, также бесконечно много:

12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96; 108; 120; 132; 144 ...

Бесконечно много и общих кратных чисел 10 и 12 — это 60; 120; 180 ...

Так сколько же карандашей рассыпалось? Получается, что без дополнительных условий на такой вопрос не ответишь. Можно только сказать, что число этих карандашей кратно 60.

При решении задачи мы находили общие натуральные кратные чисел 10 и 12. Среди этих общих кратных оказалось наименьшее число.



Наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из данных натуральных чисел a и b , называется наименьшим общим кратным этих чисел и обозначается $\text{НОК}(a, b)$.

В нашей задаче мы нашли: $\text{НОК}(10; 12) = 60$.

Все общие кратные чисел 10 и 12 выражаются через это наименьшее кратное 60:

$60n$, n — целое число.

Для нахождения наименьшего общего кратного двух натуральных чисел можно воспользоваться их разложением на простые множители.

Например, найдём $\text{НОК}(198; 12)$.

198	2	12	2
99	3	6	2
33	3	3	3
11	11	1	
1			

$$198 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11, \quad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

В разложении наименьшего общего кратного на простые множители должно полностью содержаться разложение как первого числа, так и второго.

Можно взять полностью разложение числа 198 (то есть само число 198) и дополнить его единственным дополнительным (недостающим) множителем из разложения второго числа:

$$\text{НОК}(198; 12) = 198 \cdot 2 = 396.$$

Или можно взять второе число 12 и умножить его на дополнительные множители из разложения первого числа:

$$\text{НОК}(198; 12) = 12 \cdot 3 \cdot 11 = 396.$$

Если разложения на множители записаны с помощью степеней, можно составить произведение для наименьшего общего кратного, взяв каждую степень с наибольшим показателем:

$$198 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 11^1, \quad 12 = 2^2 \cdot 3^1.$$

$$\text{НОК}(198; 12) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^1 = 4 \cdot 9 \cdot 11 = 396.$$

4 НОД и НОК

Рассмотрим несколько особых случаев нахождения наименьшего общего кратного.

1) $\text{НОК}(12; 48) = 48$, так как $48 : 12$.



Если одно из двух различных натуральных чисел делится на другое, то их наименьшее общее кратное равно большему из этих чисел:

если $a : b$, то $\text{НОК}(a; b) = a$.

2) Найдём $\text{НОК}(12; 25)$.

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3; \quad 25 = 5 \cdot 5;$$

$$\text{НОК}(12; 25) = 12 \cdot 5 \cdot 5 = 12 \cdot 25 = 300.$$

Обратите внимание: исходные числа взаимно простые.



Наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел равно их произведению.

Иногда наименьшее общее кратное двух относительно небольших чисел удобно находить следующим образом. Например, найдём $\text{НОК}(9; 15)$.

$$15 \not\div 9, \text{ поэтому } \text{НОК}(9; 15) \neq 15.$$

Будем умножать 15 на 2; 3; 4 ..., каждый раз проверяя, не делится ли полученное произведение на 9:

$$15 \cdot 2 = 30; \quad 30 \not\div 9,$$

$$15 \cdot 3 = 45; \quad 45 : 9, \text{ значит, } \text{НОК}(9; 15) = 45.$$

Подведём итоги

1. Для целых чисел a и b число a называется кратным числу b , если a делится на b нацело.
2. Наименьшим общим кратным нескольких натуральных чисел называют наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из данных чисел.

3. Чтобы найти наименьшее общее кратное двух натуральных чисел, можно разложить оба числа на простые множители и умножить первое число на дополнительные (недостающие) множители из разложения второго числа.
4. Если одно из двух различных натуральных чисел делится на другое, то их наименьшее общее кратное равно большему из этих чисел.
5. Наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел равно их произведению.

Проверь себя



1. Выберите из списка 205; 24; 0; 73; 5; 4896 числа:
 - а) кратные двум;
 - б) кратные трём;
 - в) кратные пяти.
2. Объясните, как найти натуральные числа, которые делятся и на 72, и на 108? Как можно записать все такие числа?
3. Может ли наименьшим общим кратным двух натуральных чисел быть:
 - а) 1;
 - б) одно из этих чисел;
 - в) число, большее каждого из данных чисел;
 - г) число, меньшее каждого из данных чисел?
4. Как найти наименьшее общее кратное трёх натуральных чисел?
5. В каком случае наименьшее общее кратное двух натуральных чисел равно одному из этих чисел?

Работаем с практикумом



Задание 1. Запишите выражение, позволяющее найти наименьшее общее кратное чисел m и n , если:

а) $m = 2 \cdot 7$, $n = 2 \cdot 5 \cdot 7$;

4 НОД и НОК

б) $m = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$, $n = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13$;

в) $m = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $n = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11$;

г) $m = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $n = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11$;

д) $m = 3 \cdot 11$, $n = 5 \cdot 13$;

е) $m = 2 \cdot 3 \cdot 13$, $n = 2$;

ж) $m = 2 \cdot 5 \cdot 7$, $n = 2 \cdot 3 \cdot 5$;



Задание 2. Три парохода заходят в порт после каждого рейса и на следующее утро отправляются в новый рейс. Первый пароход совершает свой рейс за 6 дней (выходит из порта утром первого дня и возвращается вечером шестого дня), второй — за 5 дней, третий — за 10 дней. В свой первый рейс все они вышли из порта одновременно. Через сколько дней после этого встретятся в порту первый пароход со вторым, первый пароход с третьим и все три парохода вместе?

Задание 3.

- 1) Заполните пустые клетки таблицы по образцу первого столбца.

m	35	49	74	100	144
n	21	42	111	125	24
НОД(m, n)	7				
НОК(m, n)	105				
$m \cdot n$	735				
НОД $\cdot$ НОК	735				

Какую гипотезу вы можете сформулировать? Попробуйте её обосновать.

- 2) Чему равен НОД двух чисел, если известно, что НОК этих чисел равно их произведению?
- 3) Делится ли НОК нескольких чисел на их НОД? Ответ обоснуйте.

ПРОВЕРЬТЕ СВОИ ЗНАНИЯ, ОТВЕТИВ НА ВОПРОСЫ

Итак, мы закончили изучение темы «Делимость чисел».



1. Найдите все натуральные числа, при делении которых на 5 в частном получается то же число, что и в остатке.
2. Запишите наименьшее трёхзначное число, кратное 3, так, чтобы его первая цифра была 4.
3. Запишите наибольшее пятизначное число, кратное 9, так, чтобы его первая цифра была 7 и все цифры были различны.
4. К числу 51 справа и слева припишите по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 36. Сколько таких чисел можно записать?
5. Существуют ли чётные простые числа?
6. В каких десятках первой сотни натуральных чисел ровно по три простых числа? Есть ли в первой сотне десятков, в котором только одно простое число?
7. Ученикам трёх шестых классов выдали 469 учебников. Каждый получил одинаковое количество книг. Сколько всего было шестиклассников и по сколько книг получил каждый из них?
8. Произведение четырёх последовательных натуральных чисел равно 3024. Найдите эти числа.
9. Сколько натуральных делителей у числа, разложение которого на простые множители имеет вид: $2^4 \cdot 5^3$? Выпишите все эти делители.

Проверьте свои знания, ответив на вопросы

10. Докажите, что:
 - а) $429 \cdot 784 + 252 \cdot 1234$ делится на 3;
 - б) $348 \cdot 24 + 348 \cdot 36$ делится на 5.
11. Когда к двузначному числу прибавили 5, сумма оказалась кратной 5. Когда прибавили 3, сумма разделилась нацело на 3. Когда прибавили 2, сумма оказалось чётной. Найдите это число.
12. Докажите, что сумма двух последовательных натуральных чисел — нечётное число.
13. Докажите, что сумма трёх последовательных натуральных чисел — составное число.
14. Докажите, что если сумма четырёх натуральных чисел нечётная, то их произведение обязательно чётное.
15. Некое число при делении на 3 даёт в остатке 2, а при делении на 2 в остатке получается 1. Какой остаток получится при делении этого числа на 6?

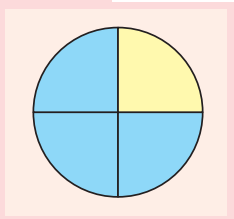
РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

ГЛАВА 5

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

§ 15. Повторение: понятие обыкновенной дроби

Давайте вспомним, что мы знаем об обыкновенных дробях.



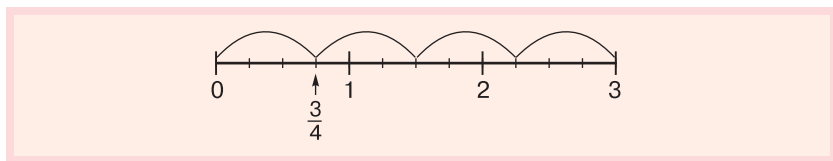
Целое (единицу) разделили на 4 равные части (доли), взяли 3 такие доли. Запишем это в виде дроби:

$$\frac{3}{4} \leftarrow \begin{array}{l} \text{числитель} \\ \text{знаменатель} \end{array}$$

Данная дробь читается — «три четвёртых».

Обыкновенная дробь равна частному от деления числителя на знаменатель:

$$\frac{3}{4} = 3 : 4$$

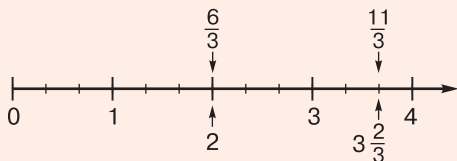


Обыкновенную дробь, у которой числитель меньше знаменателя, называют *правильной*. Если числитель равен или больше знаменателя, дробь называют *неправильной*.

Например:

$\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{11}{37}$, $\frac{245}{1000}$ — правильные обыкновенные дроби,
 $\frac{13}{4}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{43}{37}$, $\frac{245}{100}$ — неправильные обыкновенные дроби.

Неправильную дробь можно представить в виде *смешанного числа* или она может оказаться равной натуральному числу:



(В каком случае неправильная обыкновенная дробь равна 1? натуральному числу?)

Представление неправильной дроби в виде смешанного числа называют *выделением целой части*.

Выделить целую часть можно, выполнив деление числителя на знаменатель:

$$\frac{11}{3} = 3 \frac{2}{3}, \quad \text{так как } 11 : 3 = 3 \text{ (ост. 2);}$$

$$\frac{5}{4} = 1 \frac{1}{4}, \quad \text{так как } 5 : 4 = 1 \text{ (ост. 1);}$$

$$\frac{245}{100} = 2 \frac{45}{100}, \quad \text{так как } 245 : 100 = 2 \text{ (ост. 45).}$$

И наоборот, смешанное число можно представить в виде неправильной обыкновенной дроби:

$$1 \frac{5}{6} = \frac{1 \cdot 6 + 5}{6} = \frac{11}{6}; \quad 3 \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{7}{2}; \quad 8 \frac{3}{4} = \frac{8 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{35}{4}.$$

Любую обыкновенную дробь можно представить в виде десятичной, выполнив деление числителя на знаменатель:

$$\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0,4; \quad \frac{23}{8} = 23 : 8 = 2,875.$$

При этом могут получаться как конечные десятичные дроби, так и бесконечные периодические десятичные дроби:

$$\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0,33333... = 0,(3)$$

Подведём итоги

1. Обыкновенная дробь записывается в виде $\frac{a}{b}$ (a и b — натуральные числа). Число b называется знаменателем дроби (показывает, на сколько долей разделена единица), число a — числителем (показывает, сколько таких долей взято).
2. Обыкновенная дробь равна частному от деления числителя на знаменатель: $\frac{a}{b} = a : b$ (a и b — натуральные числа).
3. Обыкновенную дробь, у которой числитель меньше знаменателя, называют правильной. Обыкновенную дробь, у которой числитель больше знаменателя или равен ему, называют неправильной.
4. Неправильную обыкновенную дробь можно представить в виде смешанного или натурального числа, выполнив деление числителя на знаменатель с остатком или нацело.
5. Любую обыкновенную дробь можно представить в виде десятичной дроби (конечной или бесконечной периодической).



Проверь себя

1. Изобразите на числовом луче дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{2}$.
2. Выберите из списка $\frac{6}{10}$; $\frac{15}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{48}{15}$; $\frac{5}{5}$; $\frac{1368}{100}$ неправильные дроби и представьте каждую из них в виде смешанного или натурального числа.
3. Сформулируйте правило перевода смешанного числа в неправильную дробь. Проиллюстрируйте его применение на числах $1\frac{3}{5}$ и $3\frac{7}{11}$.
4. Представьте число 2 в виде обыкновенной дроби несколькими способами.
5. Представьте обыкновенную дробь $\frac{1}{7}$ в виде десятичной дроби (бесконечной периодической).



Работаем с практикумом

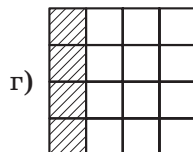
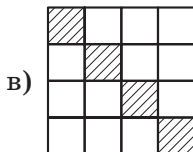
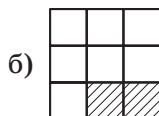
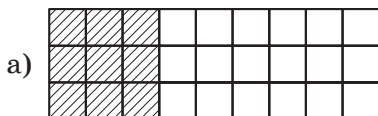
Задание 1.

- 1) Решите задачу и представьте ответ в виде обыкновенной дроби:
 - а) 2 м проволоки разделили на 3 равные части. Сколько метров получилось в каждой части?
 - б) 5 яблок разделили поровну между четырьмя школьниками. Сколько яблок досталось каждому?
 - в) 3 одинаковые шоколадки разделили поровну между 5 детьми. Сколько шоколадок досталось каждому?
- 2) Придумайте задачи с такими ответами:
 - а) $\frac{1}{4}$ кг; б) $\frac{4}{7}$ м; в) $\frac{5}{3}$ ч.

Задание 2.

- 1) Запишите в виде обыкновенной дроби результат деления чисел:
 - а) $5 : 7$; б) $5 : 3$; в) $2 : 100$; г) $4 : 1$;
 - д) $32 : 40$; е) $100 : 2$; ж) $15 : 5$.
- 2) В результате деления каких чисел может получиться дробь:
 - а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{4}{5}$; в) $\frac{11}{10}$; г) $\frac{12}{3}$; д) $\frac{2}{1}$.

Задание 3. Определите, какая часть фигуры заштрихована.

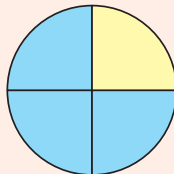


Задание 4. Нарисуйте такую фигуру, составленную из одинаковых клеточек, чтобы с её помощью можно было проиллюстрировать дробь:

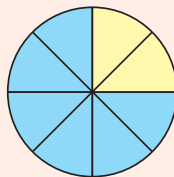
- а) $\frac{4}{10}$; б) $\frac{2}{5}$; в) $\frac{5}{2}$.

§ 16. Основное свойство обыкновенной дроби. Сокращение дробей

На этом рисунке закрашено $\frac{3}{4}$ круга.



Изменим рисунок — разделим каждую долю пополам.



Величина закрашенной части круга не изменилась, но теперь видно, что её можно обозначить и другой дробью: $\frac{6}{8}$.

При этом обратите внимание — общее количество долей увеличилось в два раза, но и количество выбранных долей также увеличилось в два раза:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$$

Можно было бы на первом рисунке разделить каждую долю не на две, а на три равные части, или на четыре, или на пять, ... И каждый раз одна и та же величина закрашенной части обозначалась бы новой дробью:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \dots$$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \dots$$

Этот пример иллюстрирует *основное свойство обыкновенной дроби*:

Если числитель и знаменатель обыкновенной дроби умножить на одно и то же натуральное число, величина дроби не изменится.

Заполним пропуск в записи

$$\frac{2}{3} = \frac{\dots}{12}.$$

Чтобы из знаменателя 3 получить знаменатель 12, нужно умножить его на 4. Значит, чтобы величина дроби не изменилась, нужно и числитель также умножить на 4:

$$\frac{2}{3} \overset{4}{=} \frac{8}{12}.$$

Говорят, что дробь $\frac{2}{3}$ *привели к новому знаменателю*, а число 4 при этом называют *дополнительным множителем*.

(Объясните, как найти дополнительный множитель для приведения обыкновенной дроби к новому знаменателю? Можно ли привести дробь $\frac{2}{3}$ к знаменателю 9? А к знаменателю 8?)

Рассмотрим полученное равенство с другой точки зрения:

$$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$





Числитель и знаменатель дроби $\frac{8}{12}$ разделили на одно и то же число (4), при этом величина дроби не изменилась. В этом случае говорят, что дробь *сократили на 4*.

Нам удалось сократить дробь $\frac{8}{12}$, потому что её числитель и знаменатель делились на одно и то же натуральное число, то есть имели общий делитель (не равный 1). Однако так бывает не всегда.

Дробь $\frac{5}{12}$ сократить нельзя, так как её числитель и знаменатель не имеют общего натурального делителя, кроме 1 (то есть являются взаимно простыми числами). Такие обыкновенные дроби называются *несократимыми*.

А можно ли сократить дробь $\frac{2548}{3003}$? Начнём проверять — имеют ли числитель и знаменатель общие делители.

На 2 сократить нельзя (числитель делится на 2, а знаменатель нет).

И на 3 тоже нельзя (знаменатель делится на 3, а числитель нет).

И на 5 не сокращается (ни числитель, ни знаменатель на 5 не делятся).

Стоп! Попробуем по-другому найти общие делители числителя и знаменателя. Разложим числитель и знаменатель этой дроби на простые множители:

$$\frac{2548}{3003} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 13}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}.$$

Теперь общие делители числителя и знаменателя стали видны: дробь можно сократить на 7 и на 13:

$$\frac{2548}{3003} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \cancel{7} \cdot 7 \cdot \cancel{13}}{3 \cdot \cancel{7} \cdot 11 \cdot \cancel{13}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 7}{3 \cdot 11} = \frac{28}{33}.$$

Получившаяся дробь $\frac{28}{33}$ уже несократимая.

Рассмотрим ещё один пример.

Дроби $\frac{12}{33}$ и $\frac{28}{77}$ кажутся совершенно разными. Однако на самом деле они обозначают одно и то же число. Убедимся в этом.

Первую дробь можно сократить на 3:

$$\frac{12}{33} = \frac{4}{11}.$$

Вторую дробь можно сократить на 7:

$$\frac{28}{77} = \frac{4}{11}.$$

Получается:

$$\frac{12}{33} = \frac{4}{11} = \frac{28}{77},$$

то есть

$$\frac{12}{33} = \frac{28}{77}.$$

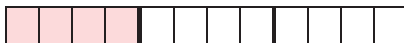
Подведём итоги

1. Если числитель и знаменатель обыкновенной дроби умножить на одно и то же натуральное число, величина дроби не изменится. Это утверждение называется основным свойством обыкновенной дроби.
2. Чтобы привести обыкновенную дробь к новому знаменателю (который делится на прежний знаменатель), нужно:
 - найти дополнительный множитель, разделив новый знаменатель на первоначальный;
 - умножить на этот дополнительный множитель числитель и знаменатель данной дроби.
3. Сократить обыкновенную дробь — это значит разделить её числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число: общий делитель числителя и знаменателя, не равный 1.
4. Обыкновенная дробь, числитель и знаменатель которой взаимно простые числа, называется несократимой.



Проверь себя

1. Представьте при помощи трёх обыкновенных дробей, какая часть полоски закрашена:



2. Назовите дополнительный множитель, с помощью которого дробь привели к новому знаменателю:

а) $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$; б) $\frac{7}{4} = \frac{35}{20}$; в) $\frac{5}{6} = \frac{\dots}{48}$.

3. Можно ли дробь $\frac{3}{4}$ привести к знаменателю:

а) 15; б) 20?

Ответ объясните.

4. Сформулируйте правило: как привести обыкновенную дробь к новому знаменателю.

5. Запишите несколько дробей, равных дроби $\frac{1}{2}$.

6. В каком случае обыкновенную дробь можно сократить?

7. Объясните, как выполнено сокращение:

$$\frac{75}{225} = \frac{15}{45} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Сократите дроби:

а) $\frac{12}{15}$; б) $\frac{63}{210}$; в) $\frac{144}{336}$.

8. Выберите из списка

$\frac{12}{16}$; $\frac{54}{66}$; $\frac{48}{64}$; $\frac{72}{16}$; $\frac{45}{60}$

все дроби, равные $\frac{36}{48}$.



Работаем с практикумом



Задание 1.

- 1) Отметьте на числовом луче дроби:

$\frac{1}{2}$; 0,5; $\frac{6}{12}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{10}{15}$; 1,5; $\frac{21}{14}$; $\frac{8}{12}$; $\frac{6}{9}$.

- 2) Сколько точек получилось на луче? Почему их меньше, чем данных дробей? Приведите примеры других дробей, соответствующих отмеченным на луче точкам.

Задание 2. Запишите десятичные дроби в виде несократимых обыкновенных дробей:

- а) 0,8; б) 0,15; в) 0,25;
г) 0,0003; д) 0,36; е) 0,75.

Задание 3. Выразите дробь:

- а) в двенадцатых долях единицы:

$$\frac{2}{3}; \quad \frac{3}{4}; \quad \frac{5}{6};$$

- б) в двухсотсороковых долях единицы:

$$\frac{5}{3}; \quad \frac{5}{6}; \quad \frac{3}{8}; \quad \frac{1}{15}.$$

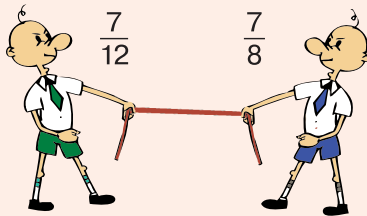
§ 17. Сравнение обыкновенных дробей

Решим задачу.

Известно, что одна из дробей

$$\frac{9}{8}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{15}{16}, \quad \frac{27}{32}, \quad \frac{1}{2}$$

находится на числовой прямой между дробями $\frac{7}{12}$ и $\frac{7}{8}$. Найдите эту дробь.

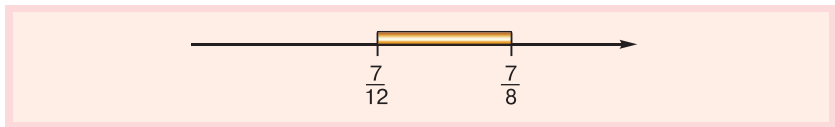




Сначала узнаем, как на числовой прямой расположены дроби $\frac{7}{12}$ и $\frac{7}{8}$. Обратите внимание — у них *одинаковые числители*. Это значит, что берётся одинаковое количество долей. Однако доли берутся разные: в первой дроби мельче, чем во второй (двенадцатые доли единицы мельче, чем восьмые доли). Следовательно,

$$\frac{7}{12} < \frac{7}{8}.$$

А можно было рассуждать так: в первой дроби 7 делится на 12, а во второй то же самое число 7 делится на 8. Значит, первое частное меньше второго. Итак, на числовой прямой дробь $\frac{7}{12}$ будет расположена левее, чем $\frac{7}{8}$:



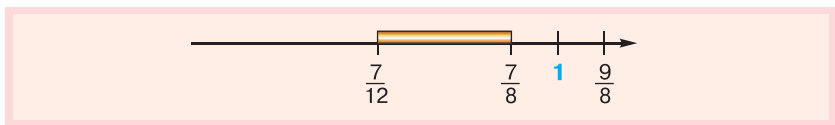
Теперь нужно выбрать среди дробей $\frac{9}{8}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{15}{16}$, $\frac{27}{32}$, $\frac{1}{2}$ ту, которая больше $\frac{7}{12}$, но меньше $\frac{7}{8}$.



Начнём с дроби $\frac{9}{8}$. Её удобно сравнивать с $\frac{7}{8}$: у этих дробей одинаковые знаменатели, то есть единица делится на одинаковые доли. Значит, больше будет та дробь, в которой этих долей берётся больше:

$$\frac{9}{8} > \frac{7}{8}$$

(а можно было прийти к такому же выводу, заметив, что $\frac{9}{8} > 1$, а $\frac{7}{8} < 1$),



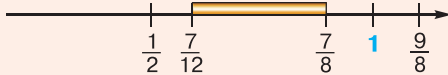
то есть $\frac{9}{8}$ нам не подходит.

Для дроби $\frac{1}{2}$ нетрудно найти место по отношению к дроби $\frac{7}{12}$:

$$\frac{1}{2} = \frac{6}{12}, \text{ а } \frac{6}{12} < \frac{7}{12},$$

значит,

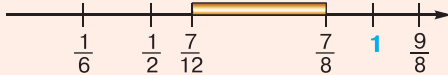
$$\frac{1}{2} < \frac{7}{12}:$$



то есть $\frac{1}{2}$ нам также не подходит, так как на числовой прямой она оказывается левее $\frac{7}{12}$.

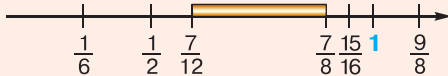
Дробь $\frac{1}{6}$ ещё меньше, чем $\frac{1}{2}$, значит, эта дробь нам тоже не подходит:

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{2}, \text{ а } \frac{1}{2} < \frac{7}{12}, \text{ следовательно, } \frac{1}{6} < \frac{7}{12}.$$



Рассмотрим теперь дробь $\frac{15}{16}$. Она похожа на $\frac{7}{8}$ тем, что и у той, и у другой числитель на единицу меньше знаменателя. Эти дроби близки к 1, но первой до 1 не хватает $\frac{1}{16}$, а второй не хватает $\frac{1}{8}$. Получается, что первая дробь ближе к 1, следовательно:

$$\frac{15}{16} > \frac{7}{8},$$



то есть и $\frac{15}{16}$ нам не подходит.

Осталась только одна дробь: $\frac{27}{32}$. Получается, что именно эта дробь должна на числовой прямой оказаться между $\frac{7}{12}$ и $\frac{7}{8}$? Давайте все-таки проверим, сравним дроби $\frac{7}{12}$, $\frac{7}{8}$ и $\frac{27}{32}$.

Сравнивать было бы легко, если бы эти дроби имели одинаковые знаменатели. Но ведь мы можем привести все эти дроби к новому знаменателю! Сделаем это.

Новый знаменатель должен делиться на знаменатель каждой из этих дробей, то есть должен быть общим кратным для чисел 12; 8 и 32. Найдём наименьшее общее кратное этих чисел:

$$\text{НОК}(12; 8; 32) = 96.$$

Приведём все три дроби к новому знаменателю 96:

$$\frac{\overset{\text{8}}{7}}{12} = \frac{56}{96}, \quad \frac{\overset{\text{12}}{7}}{8} = \frac{84}{96}, \quad \frac{\overset{\text{3}}{27}}{32} = \frac{81}{96}.$$

$$\frac{56}{96} < \frac{81}{96} < \frac{84}{96}, \text{ значит, } \frac{7}{12} < \frac{27}{32} < \frac{7}{8}.$$

Таким образом, $\frac{27}{32}$ действительно находится на числовой прямой между дробями $\frac{7}{12}$ и $\frac{7}{8}$.

Ответ: $\frac{27}{32}$.

А сколько вообще обыкновенных дробей находится на числовой прямой между $\frac{7}{12}$ и $\frac{7}{8}$?

Приведём эти дроби к общему знаменателю:

$$\text{НОК}(12; 8) = 24;$$

$$\frac{\overset{\text{2}}{7}}{12} = \frac{14}{24}, \quad \frac{\overset{\text{3}}{7}}{8} = \frac{21}{24}.$$

Так сколько же дробей между $\frac{14}{24}$ и $\frac{21}{24}$?

На первый взгляд, кажется, что шесть:

$$\frac{15}{24}; \frac{16}{24}; \frac{17}{24}; \frac{18}{24}; \frac{19}{24}; \frac{20}{24},$$

но первое впечатление бывает обманчиво.

Рассмотрим, например, промежуток между дробями $\frac{20}{24}$ и $\frac{21}{24}$. Мы можем раздробить его на 10 частей.

Действительно:

$$\frac{20}{24} = \frac{200}{240}, \quad \frac{21}{24} = \frac{210}{240},$$

а между $\frac{200}{240}$ и $\frac{210}{240}$, очевидно, находятся дроби

$$\frac{201}{240}; \frac{202}{240}; \frac{203}{240}; \frac{204}{240}; \frac{205}{240}; \frac{206}{240}; \frac{207}{240}; \frac{208}{240}; \frac{209}{240}.$$

$\frac{209}{240}$ и $\frac{210}{240}$ находятся совсем близко друг от друга, но и между ними можно легко найти новые обыкновенные дроби, например:

$$\frac{209}{240} = \frac{2090}{2400}, \quad \frac{210}{240} = \frac{2100}{2400},$$

очевидно, что между ними находятся дроби

$$\frac{2091}{2400}; \frac{2092}{2400}; \frac{2093}{2400}; \frac{2094}{2400}; \frac{2095}{2400}; \frac{2096}{2400}; \frac{2097}{2400}; \frac{2098}{2400}; \frac{2099}{2400}.$$

И так мы можем продолжать бесконечно.

Как бы близко ни оказывались друг от друга две дроби, мы можем найти дроби, которые находятся между ними. Значит, между $\frac{7}{12}$ и $\frac{7}{8}$ находится бесконечно много обыкновенных дробей.

Подведём итоги

1. Из двух обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями больше та, у которой больше числитель.

2. Из двух обыкновенных дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой меньше знаменатель.
3. Любая правильная обыкновенная дробь меньше любой неправильной.
4. Чтобы сравнить обыкновенные дроби, можно привести их к общему знаменателю (наименьшему общему знаменателю). При этом в качестве нового знаменателя обычно выбирают наименьшее общее кратное знаменателей данных дробей.
5. Между любыми двумя обыкновенными дробями находится бесконечно много других обыкновенных дробей.



Проверь себя

1. Объясните на примере дробей $\frac{23}{27}$ и $\frac{31}{36}$, как сравнивать обыкновенные дроби, приводя их к наименьшему общему знаменателю.
2. Объясните, почему любая неправильная обыкновенная дробь больше любой правильной.
3. Что произойдёт с величиной обыкновенной дроби, если:
 - а) числитель увеличить в 2 раза;
 - б) знаменатель увеличить в 2 раза;
 - в) и числитель, и знаменатель увеличить в 2 раза?
4. Сравните числа $2\frac{3}{5}$ и $\frac{16}{5}$ двумя различными способами.
5. Расположите дроби

$$\frac{10}{9}; \quad \frac{1}{8}; \quad \frac{16}{15}; \quad \frac{1}{3}; \quad \frac{13}{60}$$

в порядке возрастания.

6. Запишите несколько чисел, которые находятся между:
 - а) $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{5}$; б) 2,78 и 2,79.

**Работаем с практикумом**

Задание 1. Выясните, какая из двух дробей будет изображена на координатной прямой правее:

- а) $\frac{76}{105}$ или $\frac{5}{7}$; б) $\frac{13}{11}$ или $\frac{10}{9}$;
 в) $2\frac{5}{9}$ или $2\frac{7}{15}$; г) $\frac{161}{144}$ или $\frac{147}{132}$;
 д) $\frac{49}{24}$ или $\frac{12}{63}$; е) $2,23$ или $2\frac{13}{50}$.

Задание 2. Сравните следующие пары чисел, представив их в виде десятичных дробей:

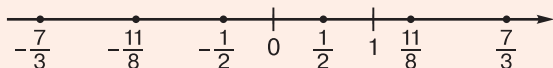
- а) $\frac{3}{9}$ и $\frac{7}{20}$; б) $\frac{6}{7}$ и $0,84$;
 в) $2,255$ и $2\frac{2}{7}$; г) $\frac{43}{21}$ и $\frac{401}{142}$;
 д) $0,6(3)$ и $\frac{45}{70}$; е) $\frac{13}{6}$ и $\frac{22}{10}$.

Задание 3. Сравните следующие пары чисел, выделив целую часть, если это необходимо:

- а) $\frac{13}{7}$ и $\frac{12}{6}$; б) $\frac{31}{3}$ и $\frac{81}{88}$; в) $\frac{27}{2}$ и $\frac{37}{3}$;
 г) $\frac{15}{4}$ и $\frac{12}{13}$; д) $\frac{41}{8}$ и $\frac{129}{24}$; е) $\frac{10}{3}$ и $\frac{117}{37}$.

§ 18. Рациональные числа

Обыкновенные дроби — это положительные числа, однако мы можем рассмотреть и числа, противоположные им, например: $-\frac{1}{2}$; $-\frac{11}{8}$; $-\frac{7}{3}$ и так далее:



Целые числа (положительные, отрицательные и 0), обыкновенные дроби и числа, противоположные обыкновенным дробям, объединяются одним названием — *рациональные числа*.

Принято определение:



Число, которое можно представить в виде $\frac{a}{b}$, где a — целое число, b — натуральное, называется рациональным числом.

Убедимся, что под это определение действительно подходят все известные нам числа. Например:

натуральное число: $5 = \frac{5}{1}$;

число 0: $0 = \frac{0}{1}$;

число, противоположное натуральному:

$$-3 = \frac{-3}{1};$$

число, противоположное обыкновенной дроби:

$$-\frac{8}{9} = \frac{-8}{9};$$

смешанное число: $7\frac{2}{3} = \frac{23}{3}$.

конечная десятичная дробь: $1,23 = \frac{123}{100}$

Труднее убедиться в том, что бесконечную периодическую десятичную дробь тоже можно представить в виде $\frac{a}{b}$, где a — целое число, b — натуральное, однако это действительно так. Проверьте, например, что:

$$0,33333\ldots = \frac{1}{3}; \quad 0,181818\ldots = \frac{2}{11}; \quad 2,45555\ldots = \frac{221}{90}.$$

Для самых любознательных

Вы можете научиться переводить бесконечные периодические десятичные дроби в обыкновенные.

Пример 1. Рассмотрим дробь $0,55555\ldots$

Обозначим $0,55555\ldots = x$.

$$10x = 5,55555\ldots = 5 + 0,55555\ldots = 5 + x$$

(бесконечные десятичные дроби умножаются на 10; 100; 1000 и так далее по такому же правилу, как и конечные десятичные дроби). Решим уравнение:

$$10x = 5 + x;$$

$$9x = 5;$$

$$x = 5 : 9;$$

$$x = \frac{5}{9}.$$

Значит, $0,55555\ldots = \frac{5}{9}$.

Пример 2. Рассмотрим дробь $0,121212\ldots$

Обозначим $0,121212\ldots = x$.

$$100x = 12,121212\ldots = 12 + 0,121212\ldots = 12 + x.$$

Решим уравнение:

$$100x = 12 + x;$$

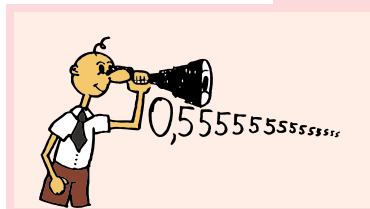
$$99x = 12;$$

$$x = 12 : 99;$$

$$x = \frac{12}{99};$$

$$x = \frac{4}{33}.$$

Значит, $0,121212\ldots = \frac{4}{33}$.



А можно ли перевести в обыкновенные дроби бесконечные периодические десятичные дроби вида $0,81111\dots$; $2,34555\dots$? Мы вернёмся к этому вопросу в теме «Сложение рациональных чисел».

Подведём итоги

1. Число, которое можно представить в виде $\frac{a}{b}$, где a — целое число, b — натуральное, называется рациональным числом.
2. Целые числа, обыкновенные дроби, числа, противоположные обыкновенным дробям, бесконечные периодические десятичные дроби являются рациональными числами.



Проверь себя

1. Представьте числа $2\frac{5}{11}$; $3,8$; $-\frac{7}{5}$; $\frac{4}{0,3}$ в виде:
 - а) $\frac{a}{b}$, где a — целое число, b — натуральное число;
 - б) бесконечной периодической десятичной дроби.
2. Расположите рациональные числа $3,5$; $-0,75$; $3\frac{5}{12}$; $-\frac{35}{48}$; $-3,6$; $3\frac{4}{9}$ в порядке убывания.
3. Опишите число 12 как можно большим количеством способов (не менее шести, например: это число натуральное, ...).



Работаем с практикумом

Задание 1. Какое из двух чисел расположено на числовой прямой правее:

- а) 3 или $\frac{9}{4}$;
- б) $\frac{22}{3}$ или 7,5;
- в) $1\frac{1}{4}$ или $\frac{4}{3}$;
- г) 3,2 или $3\frac{2}{11}$;
- д) -7 или $\frac{1}{7}$;
- е) $-10\frac{1}{3}$ или $-10\frac{1}{4}$.

Задание 2. Заполните таблицу (по образцу первой строчки):

	натуральное число	целое число	дробное число	рациональное число
7	+	+		+
−2				
12,7				
−0,05				
0				
199				
$\frac{3}{4}$				
$-\frac{77}{11}$				
0,(3)				
$\frac{8}{11}$				

Задание 3.

- 1) Подберите вместо * такое рациональное число, чтобы неравенство было верным:

а) $\frac{5}{12} < * < \frac{7}{12}$; б) $\frac{5}{12} < * < \frac{6}{12}$.

Удалось ли вам в каждом случае найти такое число? Проверьте, можно ли вместо * поставить дроби $\frac{11}{24}$; $\frac{16}{36}$? Подберите ещё несколько дробей вместо *.

- 2) Поставьте вместо * такое натуральное число, чтобы неравенство было верным:

$$\frac{5}{12} < \frac{*}{7} < \frac{6}{12}.$$

Можно ли между дробями $\frac{5}{12}$ и $\frac{6}{12}$ найти обыкновенную дробь со знаменателем: 2; 3; 4; 5; 6; 9; 15; 18?

Можно ли между дробями $\frac{1}{18}$ и $\frac{1}{12}$ найти обыкновенную дробь со знаменателем 9; 10; 30 ?

ГЛАВА 6

УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

§ 19. Умножение обыкновенных дробей. Нахождение части от числа

Для решения многих задач нужно уметь выполнять арифметические действия с рациональными числами: сложение, вычитание, умножение, деление.

Сначала мы изучим действие умножения.

Будем учиться умножать обыкновенные дроби. Чему, например, равно произведение $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$?

Мы умеем умножать десятичные дроби, например:

$$0,3 \cdot 1,2 = 0,36.$$

Запишем этот случай умножения по-другому:

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{12}{10} = \frac{36}{100}.$$

Обратите внимание: в числителе произведения стоит произведение числителей множителей ($36 = 3 \cdot 12$), а в знаменателе — произведение их знаменателей ($100 = 10 \cdot 10$). Этот пример иллюстрирует правило:

Произведение двух обыкновенных дробей равно дроби, в числителе которой — произведение числителей данных дробей, а в знаменателе — произведение их знаменателей:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Применим это правило:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}.$$

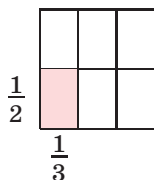


Стоп! Мы что-то сделали не так? Почему результат умножения оказался меньше обоих множителей?

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{6} < \frac{1}{2}.$$

Попробуем рассмотреть этот пример умножения с другой точки зрения — с помощью практической модели площади прямоугольника.

Изобразим прямоугольник, стороны которого составляют $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$ единицы длины:



Его площадь равна $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$.

Мы видим, что площадь прямоугольника составляет $\frac{1}{6}$ площади единичного квадрата. Значит:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Мы получили такой же результат, как и раньше по правилу умножения дробей. То есть на самом деле — умножали, а получили меньше, чем было?

На самом деле ничего удивительного в таком результате нет: произведение оказалось меньше обоих множителей, потому что они оба меньше 1. С такой ситуацией мы уже сталкивались, выполняя умножение десятичных дробей, например: $0,2 \cdot 0,3 = 0,06$ — произведение также меньше каждого множителя.

Рассмотрим ещё несколько примеров.

Пример 3.

$$\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{10} = \frac{7 \cdot 3}{9 \cdot 10} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}.$$

В этом случае вычисления можно было упростить:

$$\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{10} = \frac{7 \cdot \overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{3}{\cancel{9}} \cdot 10} = \frac{7 \cdot 1}{3 \cdot 10} = \frac{7}{30}.$$

Этот пример показывает, что *не стоит спешить выполнять умножение в числителе и знаменателе, сначала лучше проверить, можно ли полученную дробь сократить.*



Пример 4. Правило умножения обыкновенных дробей можно применить и для натуральных чисел:

$$4 \cdot 5 = \frac{4}{1} \cdot \frac{5}{1} = \frac{20}{1} = 20,$$

и для десятичных дробей:

$$1,3 \cdot 0,04 = \frac{13}{10} \cdot \frac{4}{100} = \frac{52}{1000} = 0,052.$$

Этот пример показывает, что новое правило умножения согласуется с уже известными нам правилами умножения натуральных чисел и десятичных дробей.

Мы начинали параграф с примера умножения $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$. Рассмотрим это произведение с другой точки зрения.



$$\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2},$$

$\frac{1}{6}$ — это $\frac{1}{3}$ часть от $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{3} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

Получается, что с помощью умножения $\frac{1}{3}$ на $\frac{1}{2}$ мы нашли $\frac{1}{3}$ часть от числа $\frac{1}{2}$.

Пример 5. Найдём $\frac{4}{5}$ от числа 2.

Чтобы найти $\frac{1}{5}$ часть от 2, нужно 2 разделить на 5:

$$2 : 5 = \frac{2}{5}.$$

Но нам нужна не $\frac{1}{5}$, а $\frac{4}{5}$, поэтому полученный результат умножим на 4:

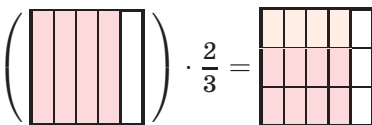
$$\frac{2}{5} \cdot 4 = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{1} = \frac{2 \cdot 4}{5} = \frac{8}{5}.$$

Такой же результат можно было бы получить, умножив 2 на $\frac{4}{5}$:

$$2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{5} = \frac{8}{5}.$$

Пример 6. Найдём $\frac{2}{3}$ от $\frac{4}{5}$.

Выполним умножение:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}.$$


Примеры 5 и 6 иллюстрируют правило:



Чтобы найти часть от числа, нужно умножить число на дробь, соответствующую этой части.

Подведём итоги

1. Произведение двух обыкновенных дробей равно дроби, в числителе которой произведение числителей данных дробей, а в знаменателе произведение их знаменателей:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

2. Чтобы найти часть от числа, нужно умножить число на дробь, соответствующую этой части.



Проверь себя

1. Найдите произведение:

а) $\frac{8}{15} \cdot \frac{5}{4}$; б) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{9}{10}$.

2. Не выполняя умножения, поставьте вместо ... знак $<$ или $>$:

а) $4,5 \cdot 1,2 \dots 4,5$; б) $4,5 \cdot 0,7 \dots 4,5$;

в) $\frac{8}{15} \cdot \frac{1}{2} \dots \frac{8}{15}$; г) $\frac{8}{15} \cdot \frac{5}{2} \dots \frac{8}{15}$;

д) $\frac{8}{15} \cdot \frac{8}{9} \dots \frac{8}{15}$.

3. Сколько минут составляют $\frac{3}{4}$ часа?

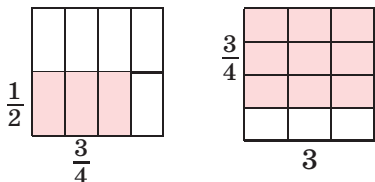
4. Найдите:

а) $\frac{2}{3}$ от $\frac{9}{16}$; б) $\frac{2}{5}$ от 100 кг; в) $\frac{3}{8}$ от 160 м.

Работаем с практикумом

Задание 1.

а) Чему равна площадь закрашенной части прямоугольника:



б) Какова длина верёвки, состоящей из трёх кусков, каждый длиной $\frac{3}{4}$ м?

в) Найдите площадь прямоугольной пластинки, длины сторон которой $\frac{4}{5}$ дм и $\frac{5}{8}$ дм.

Приведите свой пример практической ситуации, которая будет иллюстрировать умножение обыкновенных дробей.

Задание 2. Представьте каждое из чисел $\frac{7}{9}$; $1\frac{3}{8}$; $\frac{17}{24}$; $\frac{8}{12}$ в виде произведения

а) двух обыкновенных дробей;

б) трёх обыкновенных дробей.





Задание 3.

- 1) Длина прямоугольного поля равна $\frac{1}{8}$ км, а ширина составляет $\frac{4}{5}$ км.
- Вычислите площадь поля.
 - Найдите длину и ширину этого поля в метрах. Сколько квадратных метров составляет площадь этого поля?
 - Сравните найденную площадь поля с площадью полей таких размеров:

$$\frac{5}{16} \text{ км} \times \frac{5}{16} \text{ км и } 105 \text{ м} \times 900 \text{ м.}$$

- 2) Найдите площадь квадрата со стороной a , если:

а) $a = 3$; б) $a = 1\frac{1}{2}$; в) $a = \frac{3}{7}$; г) $a = \frac{2}{5}$.

§ 20. Умножение рациональных чисел

Заполните пустые клетки таблицы, выполнив умножение пар данных чисел:



	0,1	$\frac{7}{5}$	$\frac{5}{7}$	3	$3\frac{1}{5}$
0,1					
$\frac{7}{5}$					
$\frac{5}{7}$					
3					
$3\frac{1}{5}$					

Рассмотрим некоторые случаи умножения из этой таблицы более подробно.

$$0,1 \cdot 0,1.$$

Произведение двух одинаковых множителей можно записать с помощью степени: $0,1^2$, читается «0,1 во второй степени» или «0,1 в квадрате».

$$0,1^2 = 0,1 \cdot 0,1 = 0,01.$$

$$0,1 \cdot \frac{7}{5}.$$

Десятичная дробь умножается на обыкновенную. Можно представить десятичную дробь в виде обыкновенной:

$$0,1 \cdot \frac{7}{5} = \frac{1}{10} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7}{50}.$$

Однако можно поступить иначе — перевести обыкновенную дробь в десятичную:

$$0,1 \cdot \frac{7}{5} = 0,1 \cdot 1,4 = 0,14.$$

(Проверьте, что $\frac{7}{5} = 1,4$.)

Второй способ удобен не всегда. Например, при выполнении умножения $0,1 \cdot \frac{5}{7}$ переводить обыкновенную дробь в десятичную нерационально: десятичная дробь получится бесконечной периодической.

$$\frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7}.$$

$$\frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{7 \cdot 5}{5 \cdot 7} = 1.$$

Это особый случай умножения.

Если произведение двух чисел равно 1, такие числа называются взаимно обратными.



$$\frac{7}{5} \cdot 3.$$

Обыкновенная дробь умножается на целое число.

$$\frac{7}{5} \cdot 3 = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{1} = \frac{7 \cdot 3}{5 \cdot 1} = \frac{21}{5}.$$

(Можно было бы сделать ещё один шаг, выделив в ответе целую часть:

$$\frac{7}{5} \cdot 3 = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{1} = \frac{21}{5} = 4 \frac{1}{5}.)$$

Обратите внимание — множитель 3 оказался в числителе дроби-произведения.

$$\frac{7}{5} \cdot 3 = \frac{7 \cdot 3}{5}.$$

$$\frac{5}{7} \cdot 3 \frac{1}{5}.$$

Обыкновенная дробь умножается на смешанное число.

Представим смешанное число в виде обыкновенной дроби:

$$\frac{5}{7} \cdot 3 \frac{1}{5} = \frac{5}{7} \cdot \frac{16}{5} = \frac{5 \cdot 16}{7 \cdot 5} = \frac{16}{7}.$$

Часть таблицы заполнена:

	0,1	$\frac{7}{5}$	$\frac{5}{7}$	3	$3 \frac{1}{5}$
0,1	0,01	$\frac{7}{50}$	$\frac{5}{70}$	0,3	$\frac{16}{50}$
$\frac{7}{5}$		$\frac{49}{25}$	1	$\frac{21}{5}$	$\frac{112}{25}$
$\frac{5}{7}$			$\frac{25}{49}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{16}{7}$
3				9	$\frac{48}{5}$
$3 \frac{1}{5}$					$\frac{256}{25}$

Чтобы заполнить клетки, оставшиеся пустыми, дополнительных вычислений уже не потребуется — все

рациональные числа подчиняются переместительному закону умножения:

	0,1	$\frac{7}{5}$	$\frac{5}{7}$	3	$3\frac{1}{5}$
0,1	0,01	$\frac{7}{50}$	$\frac{5}{70}$	0,3	$\frac{16}{50}$
$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{49}{25}$	1	$\frac{21}{5}$	$\frac{112}{25}$
$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{70}$	1	$\frac{25}{49}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{16}{7}$
3	0,3	$\frac{21}{5}$	$\frac{15}{7}$	9	$\frac{48}{5}$
$3\frac{1}{5}$	$\frac{16}{50}$	$\frac{112}{25}$	$\frac{16}{7}$	$\frac{48}{5}$	$\frac{256}{25}$

Рассмотрим ещё два примера — умножение рациональных чисел с разными и одинаковыми знаками:

Пример 1. Найдём произведение: $-\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$.

Чтобы найти произведение двух чисел с разными знаками, нужно поставить знак «−» и найти произведение их модулей:

$$-\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = -\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}\right) = -\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = -\frac{10}{21}.$$

Можно было бы действовать по-другому (перенося правило умножения обыкновенных дробей на случай умножения рациональных чисел, записанных в виде $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное):

$$-\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{-2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{-2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{-10}{21} = -\frac{10}{21}.$$

Пример 2. Найдём произведение: $-\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{5}{7}\right)$.

$$-\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) = +\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}\right) = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}.$$

Или:

$$-\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) = \frac{-2}{3} \cdot \frac{-5}{7} = \frac{-2 \cdot (-5)}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}.$$

Пример 3. Найдём значения произведений:

$$\left(-\frac{3}{8} \cdot \left(-1\frac{7}{9}\right)\right) \cdot 0,9 \text{ и } -\frac{3}{8} \cdot \left(-1\frac{7}{9} \cdot 0,9\right).$$

(Выполните все вычисления самостоятельно.)

Если вы выполнили все действия правильно, то у вас получились два одинаковых результата. Этот пример иллюстрирует то, что сочетательный закон умножения выполняется для любых рациональных чисел.

Подведём итоги

1. Чтобы умножить обыкновенную дробь на целое число, нужно умножить на это число числитель дроби, а знаменатель оставить прежним.
2. Чтобы умножить десятичную дробь на обыкновенную, можно десятичную дробь перевести в обыкновенную и выполнить умножение двух обыкновенных дробей. В некоторых случаях можно перевести обыкновенную дробь в десятичную (если она получается конечной) и выполнить умножение двух десятичных дробей.
3. Чтобы выполнить умножение на смешанное число, нужно перевести его в неправильную дробь.
4. Если произведение двух чисел равно 1, такие числа называются взаимно обратными.
5. $a^2 = a \cdot a$, читается « a во второй степени» или « a в квадрате».
6. Для всех рациональных чисел выполняются переместительный и сочетательный законы умножения.

**Проверь себя**

1. Сформулируйте правила умножения рационального числа на 0; 1 и -1 .
2. Объясните, как умножить смешанное число на десятичную дробь.
3. Проверьте, что числа являются взаимно обратными:
а) $\frac{1}{3}$ и 3; б) $1\frac{3}{5}$ и $\frac{5}{8}$; в) $\frac{5}{12}$ и 2,4; г) 0,12 и $8\frac{1}{3}$.
4. Найдите:

а) 8^2 ; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$; в) $\left(2\frac{1}{4}\right)^2$; г) $\left(-\frac{4}{5}\right)^2$.

**Работаем с практикумом**

Задание 1. Вычислите удобным способом:

- | | |
|--|---|
| а) $\frac{7}{5} \cdot 1,25 \cdot 9$; | б) $\frac{8}{21} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{21}{8}$; |
| в) $0,6 \cdot \frac{4}{7} \cdot 1\frac{2}{3}$; | г) $2 \cdot \frac{13}{14} \cdot 0,5$; |
| д) $\frac{8}{9} \cdot \frac{7}{15} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$; | е) $\frac{12}{25} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{5}{4}$; |
| ж) $31,25 \cdot \frac{4}{31} \cdot 0$; | з) $\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 1,6 \cdot 0,5$; |
| и) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (-1,5) \cdot \frac{6}{5}$; | к) $\frac{7}{15} \cdot \frac{13}{17} \cdot \frac{34}{39}$; |
| л) $\left(-4\frac{1}{12}\right) \cdot \left(-8\frac{6}{7}\right) \cdot (-6)$; | м) $6\frac{1}{4} \cdot \left(-1\frac{2}{5}\right) \cdot (-8)$. |

Задание 2. Сгруппируйте следующие выражения:

- 1) по знакам множителей;
- 2) по знакам результатов.

- | | | |
|---|---|--|
| а) $-\frac{5}{9} \cdot \left(-\frac{12}{25}\right)$; | б) $-2\frac{2}{15} \cdot (-6,25)$; | в) $-\frac{2}{5} \cdot \frac{15}{17}$; |
| г) $5 \cdot 2\frac{1}{5}$; | д) $\frac{4}{15} \cdot \left(-\frac{5}{8}\right)$; | е) $-2,8 \cdot \left(-1\frac{1}{7}\right)$; |
| ж) $-4\frac{1}{2} \cdot \left(-1\frac{1}{3}\right)$; | з) $-3\frac{1}{5} \cdot 1,2$; | и) $3\frac{3}{5} \cdot 1\frac{9}{16}$; |

к) $-3\frac{1}{2} \cdot 1\frac{9}{16}$; л) $\frac{10}{34} \cdot \frac{17}{25}$; м) $1,8 \cdot \left(-1\frac{1}{3}\right)$.

Найдите значения этих выражений.

Верно ли, что:

- произведение двух дробей может быть целым числом;
- произведение двух положительных дробей всегда больше одного из множителей;
- произведение двух положительных дробей может быть меньше одного из множителей?

Задание 3. Не выполняя умножения, сравните:

а) $\frac{14}{19} \cdot (-0,953)$ и 0;

б) $\frac{14}{19} \cdot 0,953$ и 1;

в) $\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \dots \cdot \left(-\frac{10}{11}\right)$ и 0;

г) $\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \dots \cdot \left(-\frac{10}{11}\right)$ и 1.

§ 21. Деление обыкновенных дробей.

Различные случаи деления рациональных чисел

$S = \frac{1}{2} \text{ кв. дм}$?

$\frac{3}{4} \text{ дм}$

Решим задачу.

*Площадь прямоугольника равна $\frac{1}{2} \text{ дм}^2$,
а длина одной из его сторон равна $\frac{3}{4} \text{ дм}$.
Какова длина другой стороны?*

Длину стороны можно найти, разделив площадь прямоугольника на длину известной стороны: $\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$.
Только как найти такое частное?

$$\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = x, \text{ если } \frac{3}{4} \cdot x = \frac{1}{2}.$$

Попробуем подобрать такой множитель.

Несколько попыток — и удача: $x = \frac{2}{3}$! Действительно:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{1}{2}.$$

Итак,

$$\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3}.$$

Длина другой стороны прямоугольника равна $\frac{2}{3}$ дм.

Решая задачу, мы нашли частное двух обыкновенных дробей. Однако пришлось подбирать результат наугад. Неужели деление обыкновенных дробей так и выполняется?



Посмотрим на этот пример деления с другой стороны.

$$\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = x.$$

$$\frac{3}{4} \cdot x = \frac{1}{2}.$$

Нужно решить уравнение. Для этого умножим обе части уравнения на такое число, чтобы коэффициент при x стал равным 1, то есть это число при умножении на $\frac{3}{4}$ должно дать 1. Это число $\frac{4}{3}$, обратное $\frac{3}{4}$.

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3};$$

$$1 \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3};$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3};$$

$$x = \frac{2}{3}.$$

Итак, с одной стороны, $x = \frac{1}{2} : \frac{3}{4}$, а с другой — получилось, что $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}$.

Таким образом, имеем следующий результат:

$$\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}.$$

Мы заменили деление умножением на такое число, которое при умножении на делитель даёт 1, то есть на число, обратное делителю.

Сформулируем общее правило:



Чтобы выполнить деление на обыкновенную дробь, нужно умножить делимое на число, обратное делителю.

Рассмотрим несколько примеров деления рациональных чисел.

1. Деление двух обыкновенных дробей:

$$\frac{5}{12} : \frac{15}{16} = \frac{5}{12} \cdot \frac{16}{15} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot \overset{4}{\cancel{16}}}{\underset{3}{\cancel{12}} \cdot \underset{3}{\cancel{15}}} = \frac{4}{9}.$$

2. Деление на смешанное число:

$$\frac{9}{8} : 1\frac{1}{2} = \frac{9}{8} : \frac{3}{2} = \frac{9}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{9 \cdot 2}{8 \cdot 3} = \frac{3}{4}.$$

3. Деление натурального числа на обыкновенную дробь:

$$2 : \frac{1}{3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{1} = \frac{6}{1} = 6.$$

4. Деление обыкновенной дроби на натуральное число:

$$\frac{1}{3} : 5 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{15},$$

обратите внимание: мы делили на число 5, и оно оказалось множителем в знаменателе.

5. Деление обыкновенной дроби на десятичную:

$$\frac{2}{5} : 0,6 = \frac{2}{5} : \frac{6}{10} = \frac{2 \cdot 10}{5 \cdot 6} = \frac{2}{3}.$$

6. Деление чисел с разными знаками:

$$\frac{2}{3} : \left(-\frac{5}{6}\right) = -\left(\frac{2}{3} : \frac{5}{6}\right) = -\frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 5} = -\frac{4}{5}$$

или:

$$\frac{2}{3} : \left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{2}{3} : \frac{-5}{6} = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot (-5)} = \frac{4}{-5} = -\frac{4}{5}.$$

Подведём итоги

Чтобы разделить рациональные числа, нужно умножить делимое на число, обратное делителю.

Проверь себя

1. Найдите число, обратное числу:

а) $\frac{5}{8}$; б) 3; в) $2\frac{3}{4}$; г) 1,2.

2. Выполните действия:

а) $\frac{8}{15} : \frac{2}{5}$; б) $\frac{3}{4} : 2$; в) $4 : \frac{1}{2}$;
г) $\frac{9}{16} : 0,375$; д) $3\frac{1}{3} : 1\frac{3}{10}$; е) $\frac{12}{17} \cdot \frac{51}{60} : \frac{3}{10}$.

3. Приведите примеры деления двух обыкновенных дробей, в результате которого получается:

- а) 1;
- б) правильная обыкновенная дробь;
- в) натуральное число, не равное 1;
- г) число, большее делимого.

Работаем с практикумом

Задание 1. Проверьте, правильно ли выполнено деление:

а) $\frac{7}{8} : \frac{8}{3} = \frac{7 \cdot 8}{8 \cdot 3} = \frac{7}{3}$; б) $\frac{2}{3} : \frac{4}{9} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$;

в) $4 : 2\frac{2}{3} = 4 \cdot 2\frac{3}{2} = \frac{4}{1} \cdot \frac{7}{2} = \frac{4 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 14$;



$$\text{г) } 5\frac{5}{8} : 2\frac{13}{16} = \frac{45}{8} : \frac{45}{16} = \frac{45}{8} \cdot \frac{16}{45} = \frac{2}{1} = 2;$$

$$\text{д) } \frac{2}{3} : (-5) = \frac{2 \cdot (-1)}{3 \cdot 5} = -\frac{2}{15}.$$

Какие ошибки допущены?

Задание 2.

1. Подберите вместо букв несколько таких рациональных чисел, чтобы полученные числовые неравенства были верными:

$$\text{а) } \frac{8}{9} : a < \frac{8}{9}; \quad \text{б) } \frac{8}{9} : a > \frac{8}{9}; \quad \text{в) } -\frac{8}{9} : a < 0$$

$$\text{г) } \frac{1}{2} : x > \frac{1}{2}; \quad \text{д) } 7 : t > 7; \quad \text{е) } \frac{7}{5} : x > \frac{7}{5};$$

$$\text{ж) } \frac{3}{2} : z > 2; \quad \text{з) } \frac{3}{4} : x > \frac{3}{4}; \quad \text{и) } x : \frac{7}{5} < x;$$

$$\text{к) } x : \frac{11}{3} > 0; \quad \text{л) } \frac{11}{3} : x > 0; \quad \text{м) } \frac{11}{3} : x < 0.$$

2. Продолжите предложение так, чтобы получилось высказывание, верное для всех положительных рациональных чисел:

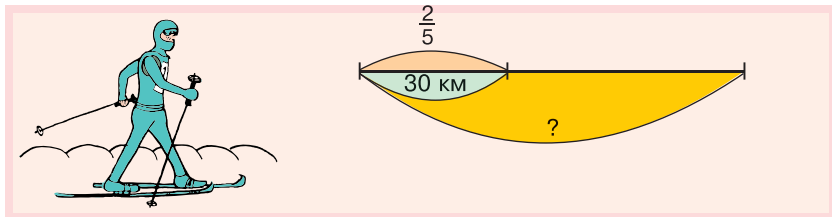
- а) частное больше делимого, если делитель. . . ;
б) частное равно делимому, если. . . .

Задание 3. Что это за число, если $\frac{1}{2}$ — треть этого числа?

§ 22. Нахождение числа по его части

Решим задачу.

Лыжник прошёл по трассе 30 км, что составляет $\frac{2}{5}$ всего маршрута. Какова длина маршрута?



$\frac{2}{5}$ маршрута — это 30 км, $\frac{1}{5}$ маршрута — в два раза меньше, чем $\frac{2}{5}$, то есть $30 : 2 = 15$ (км).

Весь маршрут — это $\frac{5}{5}$, то есть в пять раз больше, чем $\frac{1}{5}$, значит, длина всего маршрута $15 \cdot 5 = 75$ (км).

Ответ: длина маршрута 75 км.

Запишем решение этой задачи в виде одного числового выражения:

$$(30 : 2) \cdot 5.$$

Это выражение можно преобразовать следующим образом:

$$(30 : 2) \cdot 5 = \frac{30}{2} \cdot 5 = \frac{30 \cdot 5}{2} = 30 \cdot \frac{5}{2} = 30 : \frac{2}{5}.$$

Итак, зная, что $\frac{2}{5}$ величины составляют 30 км, значение всей величины можно было найти, выполнив деление $30 : \frac{2}{5}$.

Сформулируем общее правило:

Чтобы по известной части числа найти само число, нужно разделить известную часть на дробь, соответствующую этой части.



Решим ещё одну задачу, используя на этот раз полученное правило.

Токарь выточил 15 деталей, что составляет $\frac{3}{4}$ его дневной нормы. Сколько всего деталей должен выточить токарь за день?

По известной части нужно найти целое:

$$15 : \frac{3}{4} = \frac{15 \cdot 4}{3} = 20 \text{ (деталей).}$$

Проверим — найдём $\frac{3}{4}$ от найденного числа:

$$20 \cdot \frac{3}{4} = \frac{20 \cdot 3}{4} = 15 \text{ (деталей) — верно.}$$

Ответ: дневное задание составляет 20 деталей.

В § 19 мы решали обратную задачу — искали часть от целого.

Сравним два типа задач:

*Нахождение части
от числа*

целое равно 6,

$\frac{2}{3}$ от целого — ?

Умножаем на дробь:

$$6 \cdot \frac{2}{3} = \frac{6 \cdot 2}{3} = 4.$$

Часть равна 4.

*Нахождение числа
по его части*

$\frac{2}{3}$ от целого равны 4,

целое — ?

Делим на дробь:

$$4 : \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6.$$

Целое равно 6.

Эти задачи взаимно обратные, и действия для их решения используются тоже взаимно обратные:

$$\text{часть} = \text{целое} \cdot \text{дробь} \quad \text{целое} = \text{часть} : \text{дробь}.$$

Рассмотрим ещё одну задачу.

В 6 «А» классе контрольную по математике писали 24 ученика. Из них 8 человек получили оценку «отлично». Какая часть класса написала эту контрольную на «отлично»?

Обозначим неизвестную часть буквой x . Тогда:

$$8 = x \cdot 24,$$

$$x = \frac{8}{24},$$

$$x = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$ класса написала контрольную на «отлично».

Решая эту задачу, мы нашли, какую часть составляет одно число от другого.

$$\begin{array}{l} 31 - x = 8 \\ x = 31 - 8 \\ x = 23 \\ 31 - 23 = 8 \\ 8 + 12 = 20 \end{array}$$

Подведём итоги

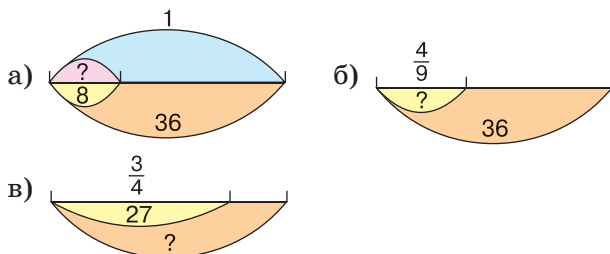
1. Чтобы по известной части числа найти само число, нужно разделить известную часть на дробь, соответствующую этой части.
2. Чтобы найти, какую часть составляет одно число от другого, нужно разделить первое число на второе.

Проверь себя

1. Решите задачу двумя способами: «Найдите число, $\frac{3}{8}$ которого равны 24».
2. Проверьте, что $\frac{3}{5}$ от $\frac{40}{27}$ равны $\frac{8}{9}$.
3. Решите задачи:
 - а) Петя прочитал 40 страниц, что составляет $\frac{2}{7}$ всей книги. Сколько страниц ему осталось прочитать?
 - б) Автор романа набрал на компьютере $\frac{3}{5}$ рукописи, в которой всего 420 страниц. Сколько страниц ему осталось набрать?

Работаем с практикумом

Задание 1.



Соотнесите следующие вопросы с предложенными рисунками и дайте ответ на каждый вопрос:

1. Какую часть от 36 карандашей составляют 8 карандашей?

2. Сколько карандашей составляет $\frac{4}{9}$ от 36 карандашей?

3. Сколько всего карандашей, если $\frac{3}{4}$ от их числа составляют 27 карандашей?

С помощью какого действия находится:

а) часть от числа; б) число по его части?

Задание 2. Нарисуйте отрезок, от которого данный отрезок AC составляет $\frac{3}{4}$.



Задание 3.

1. Нарисуйте два равных прямоугольника. Вырежьте из них 2 разных прямоугольника, площадь каждого из которых составляет $\frac{3}{4}$ площади исходного прямоугольника.

2. Нарисуйте прямоугольник. Начертите три разных прямоугольника так, чтобы площадь исходного прямоугольника составляла $\frac{1}{4}$ площади каждого из них.



Задание 4. Какую часть часа составляют 10 мин?

Сколько минут составляет:

а) $\frac{1}{2}$ часа; б) $\frac{1}{3}$ часа; в) $\frac{1}{5}$ часа; г) $\frac{3}{4}$ часа?

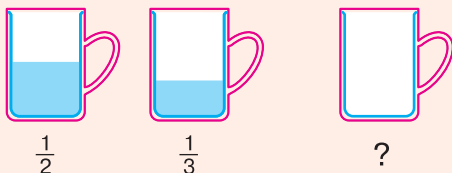
ГЛАВА 7

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

§ 23. Сложение и вычитание обыкновенных дробей

Решим задачу.

Имеются три одинаковых кувшина. Первый заполнен водой на $\frac{1}{3}$, второй — на $\frac{1}{2}$, третий пустой. Всю воду из первых двух кувшинов хотят перелить в третий. Поместится ли туда вода? Если да, то какую часть кувшина она займёт?



На первый вопрос ответить нетрудно: вода поместится. Действительно: второй кувшин заполнен наполовину, а в первом воды меньше половины.

Чтобы ответить на второй вопрос, нужно сложить обыкновенные дроби:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}.$$

Но только как это сделать?

Подсказку можно найти на следующем рисунке.



Прокомментируем этот рисунок с математической точки зрения.

Каждый кувшин разделили на шесть долей — каждую дробь привели к новому знаменателю 6. В результате дроби стало очень легко складывать:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}.$$

Ответ: вода из первых двух кувшинов поместится в третий и займёт $\frac{5}{6}$ его объёма.

Решая эту задачу, мы складывали обыкновенные дроби. Опишем в виде общих правил то, как мы действовали.



Сумма обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями равна обыкновенной дроби с таким же знаменателем, числитель которой равен сумме числителей слагаемых.

Например:

$$\frac{3}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3+1}{7} = \frac{4}{7}; \quad \frac{2}{11} + \frac{5}{11} + \frac{7}{11} = \frac{2+5+7}{11} = \frac{14}{11}.$$

При решении задачи мы складывали дроби с разными знаменателями, для чего пришлось привести их к одному знаменателю. Вспомните: так же мы поступали при сравнении обыкновенных дробей (§ 17).



Чтобы сложить обыкновенные дроби с разными знаменателями, нужно:

- 1) ***привести их к общему знаменателю. Для этого:***
 - ***выбрать общий знаменатель (лучше искать наименьший общий знаменатель, который равен наименьшему общему кратному исходных знаменателей);***

- *найти дополнительный множитель для каждой дроби, разделив новый знаменатель на старый;*
 - *умножить числитель и знаменатель каждой дроби на дополнительный множитель;*
- 2) *выполнить сложение полученных дробей с одинаковыми знаменателями.*

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. $\frac{5}{12} + \frac{4}{9}$.

Найдём наименьший общий знаменатель.

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3; \quad 9 = 3 \cdot 3; \quad \text{НОК}(12; 9) = 12 \cdot 3 = 36.$$

$$\overset{\textcircled{3}}{\frac{5}{12}} + \overset{\textcircled{4}}{\frac{4}{9}} = \frac{5 \cdot 3 + 4 \cdot 4}{36} = \frac{15 + 16}{36} = \frac{31}{36}.$$

Пример 2. $\frac{2}{3} + \frac{8}{15}$.

Один из знаменателей делится на другой, поэтому наименьший общий знаменатель равен большему из знаменателей, то есть 15.

$$\overset{\textcircled{5}}{\frac{2}{3}} + \overset{\textcircled{1}}{\frac{8}{15}} = \frac{10 + 8}{15} = \frac{18}{15} = \frac{6}{5} = 1 \frac{1}{5}.$$

Пример 3. $\frac{3}{4} + \frac{2}{15}$.

Знаменатели дробей взаимно просты, поэтому их наименьшее общее кратное равно их произведению, то есть наименьший общий знаменатель равен $4 \cdot 15 = 60$.

$$\overset{\textcircled{15}}{\frac{3}{4}} + \overset{\textcircled{4}}{\frac{2}{15}} = \frac{45 + 8}{60} = \frac{53}{60}.$$

По таким же правилам выполняется и вычитание обыкновенных дробей:



Разность двух обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями равна дроби с таким же знаменателем, числитель которой равен разности числителей этих дробей.

Чтобы вычесть обыкновенные дроби с разными знаменателями, нужно:

- *привести их к общему знаменателю;*
- *выполнить вычитание полученных дробей с одинаковыми знаменателями.*

Пример 4.

$$\frac{\overset{2}{38}}{45} - \frac{\overset{5}{13}}{18} = \frac{76}{90} - \frac{65}{90} = \frac{76 - 65}{90} = \frac{11}{90}.$$

Пример 5.

$$\frac{\overset{3}{3}}{4} - \frac{\overset{2}{5}}{6} = \frac{9 - 10}{12} = \frac{-1}{12} = -\frac{1}{12}.$$

Пример 6. $\frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{5}{12} + \frac{5}{28} + \frac{1}{8}.$

Приведём все дроби к наименьшему общему знаменателю:

$$\text{НОК}(12; 14; 28; 8) = 168.$$

$$\frac{\overset{14}{1}}{12} + \frac{\overset{12}{1}}{14} + \frac{\overset{14}{5}}{12} + \frac{\overset{6}{5}}{28} + \frac{\overset{21}{1}}{8} = \frac{14 + 12 + 70 + 30 + 21}{168} = \frac{147}{168} = \frac{7}{8}.$$

Однако значение этого выражения можно было бы найти другим способом, воспользовавшись тем, что для любых рациональных чисел выполняются переместительный и сочетательный законы сложения.

Выберем пары дробей, которые удобнее складывать:

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{5}{12} + \frac{5}{28} + \frac{1}{8} &= \left(\frac{1}{12} + \frac{5}{12} \right) + \left(\overset{\text{2}}{\frac{1}{14}} + \frac{5}{28} \right) + \frac{1}{8} = \\ &= \frac{6}{12} + \frac{7}{28} + \frac{1}{8} = \overset{\text{4}}{\frac{1}{2}} + \overset{\text{2}}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Подведём итоги

1. Сумма (разность) двух обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями равна дроби с таким же знаменателем, числитель которой равен сумме (разности) числителей слагаемых.
2. Чтобы сложить (вычесть) обыкновенные дроби с разными знаменателями, нужно привести их к общему знаменателю и выполнить сложение (вычитание) полученных дробей с одинаковыми знаменателями.
3. Для любых рациональных чисел верны переместительный и сочетательный законы сложения.

Проверь себя



1. Заполните пропуски:

$$\overset{\text{...}}{\frac{4}{15}} + \overset{\text{...}}{\frac{11}{12}} = \frac{\text{...} + \text{...}}{60} = \frac{\text{...}}{60} = \dots$$

2. Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{9}$; б) $\frac{5}{18}$ и $\frac{2}{3}$; в) $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{3}$.

3. Выполните действия:

а) $\frac{5}{6} + \frac{1}{2}$; б) $\frac{4}{15} - \frac{1}{6}$; в) $\frac{3}{11} + \frac{2}{3}$.

4. Приведите пример сложения двух обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями, чтобы сумма



была целым числом. Приведите такой же пример для дробей с разными знаменателями.

5. Приведите пример вычитания двух обыкновенных дробей так, чтобы:

- а) разность была натуральным числом;
- б) разность была отрицательной.

www



Работаем с практикумом



Задание 1. Выполните сложение:

- 1) $\frac{7}{20} + \frac{3}{20}$; 6) $\frac{7}{3} + \frac{7}{27}$; 11) $\frac{2}{5} + \frac{4}{4}$; 16) $\frac{2}{24} + \frac{5}{36}$;
- 2) $\frac{27}{7} + \frac{9}{7}$; 7) $\frac{5}{6} + \frac{2}{3}$; 12) $\frac{3}{7} + \frac{5}{4}$; 17) $\frac{17}{96} + \frac{41}{72}$;
- 3) $\frac{27}{24} + \frac{11}{24}$; 8) $\frac{7}{9} + \frac{5}{18}$; 13) $\frac{3}{5} + \frac{1}{6}$; 18) $\frac{10}{39} + \frac{15}{26}$;
- 4) $\frac{25}{111} + \frac{12}{111}$; 9) $\frac{7}{20} + \frac{9}{10}$; 14) $\frac{14}{37} + \frac{1}{3}$; 19) $\frac{29}{320} + \frac{19}{280}$;
- 5) $\frac{17}{12} + \frac{13}{12}$; 10) $\frac{4}{13} + \frac{5}{26}$; 15) $\frac{7}{15} + \frac{29}{28}$; 20) $\frac{201}{125} + \frac{39}{150}$.

Какой «столбик» примеров можно озаглавить:

- «Сложение дробей с одинаковыми знаменателями»;
- «Сложение дробей, знаменатель одной из которых кратен знаменателю другой»;
- «Сложение дробей со взаимно простыми знаменателями»;
- «Самый общий случай сложения дробей»?



Задание 2. Решите уравнения:

- 1) $\frac{x}{4} + \frac{5}{4} = \frac{3}{2}$; 2) $\frac{x}{5} + \frac{2}{5} = \frac{8}{10}$; 3) $\frac{x}{5} + \frac{3}{5} = 1$;
- 4) $\frac{2}{3} + \frac{y}{9} = \frac{6}{9}$; 5) $\frac{3}{2} + \frac{y}{4} = \frac{10}{5}$; 6) $\frac{4}{5} + \frac{x}{10} = \frac{1}{2}$;
- 7) $\frac{x}{7} + \frac{2}{7} = 1$; 8) $\frac{x}{80} + \frac{2}{5} = \frac{3}{1}$.

Может ли сумма положительных дробей быть меньше хотя бы одного из слагаемых?

Задание 3. Из полной бочки отлили $\frac{2}{5}$ воды, потом $\frac{1}{3}$ оставшейся в ней воды, после чего в бочке осталось 8 вёдер. Сколько воды было в бочке первоначально?

§ 24. Различные случаи сложения и вычитания рациональных чисел

Рассмотрим примеры сложения и вычитания рациональных чисел, когда слагаемые представляют собой не только обыкновенные дроби, но и целые числа, десятичные дроби или смешанные числа.



Пример 1. $\frac{1}{3} + 0,2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{10} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5+3}{15} = \frac{8}{15}$.

Выполняя сложение обыкновенной дроби и десятичной, мы перевели десятичную дробь в обыкновенную.

Иногда можно перевести обыкновенную дробь в десятичную (если при этом получается конечная десятичная дробь). Например:

$$\frac{1}{4} + 0,2 = 0,25 + 0,2 = 0,45.$$

Пример 2. $9\frac{3}{4} + 5\frac{5}{6}$.

Сложение смешанных чисел можно выполнить разными способами.

Например, переведём смешанные числа в неправильные дроби:

$$9\frac{3}{4} + 5\frac{5}{6} = \frac{39}{4} + \frac{35}{6} = \frac{117 + 70}{12} = \frac{187}{12} = 15\frac{7}{12}$$

Выполним сложение другим способом, используя то, что смешанное число можно представить в виде суммы целой и дробной частей:

$$9\frac{3}{4} = 9 + \frac{3}{4}; \quad 5\frac{5}{6} = 5 + \frac{5}{6};$$

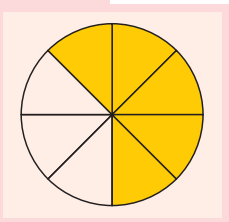
$$9\frac{3}{4} + 5\frac{5}{6} = (9 + 5) + \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right) = 14 + \frac{9+10}{12} = 14 + \frac{19}{12} =$$

$$= 14 + 1\frac{7}{12} = 15\frac{7}{12}.$$

То же самое можно записать короче:

$$9\overset{\text{3}}{\frac{3}{4}} + 5\overset{\text{2}}{\frac{5}{6}} = 9\frac{9}{12} + 5\frac{10}{12} = 14\frac{19}{12} = 15\frac{7}{12}.$$

Пример 3. $1 - \frac{5}{8}$.



Обыкновенная дробь вычитается из единицы.

Раздробим единицу на нужные доли — представим единицу в виде неправильной дроби со знаменателем 8:

$$1 - \frac{5}{8} = \frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}.$$



При этом говорят, что найдено *дополнение дроби до единицы*.

Пример 4. Рассмотрим, в чем особенности вычитания смешанных чисел.

$$9\overset{\text{3}}{\frac{3}{4}} - 5\overset{\text{2}}{\frac{5}{6}} = 9\frac{9}{12} - 5\frac{10}{12} = ?$$

Стоп! Мы столкнулись с проблемой — дробная часть уменьшаемого меньше, чем дробная часть вычитаемого. Выйти из затруднительной ситуации можно разными способами. Например:

$$9\frac{9}{12} - 5\frac{10}{12} = 4 + \frac{9-10}{12} = 4 + \frac{-1}{12} = 4 - \frac{1}{12} = 3\frac{11}{12}.$$

Или так:

$$9\frac{9}{12} - 5\frac{10}{12} = 8\frac{21}{12} - 5\frac{10}{12} = 3\frac{11}{12}.$$

Во втором случае мы «заняли» в целой части уменьшаемого единицу, раздробив её на нужные доли.

Рассмотрим несколько примеров сложения рациональных чисел с одинаковыми и разными знаками. Не забывайте, что в числовых выражениях, в которых содержатся только действия сложения и вычитания, знаки «+» и «—» можно считать не знаками действий, а знаками слагаемых.

Пример 5. $-\frac{9}{10} - \frac{5}{12}.$

Складываются числа с одинаковыми знаками.

Можно поступить так: поставить общий знак и сложить модули чисел:

$$-\frac{9}{10} - \frac{5}{12} = -\left(\overset{\text{6}}{\frac{9}{10}} + \overset{\text{5}}{\frac{5}{12}}\right) = -\frac{54 + 25}{60} = -\frac{79}{60} = -1\frac{19}{60}.$$

Или так (знак каждого слагаемого считать относящимся к числителю дроби):

$$-\frac{9}{10} - \frac{5}{12} = \overset{\text{6}}{\frac{-9}{10}} + \overset{\text{5}}{\frac{-5}{12}} = \frac{-54 - 25}{60} = \frac{-79}{60} = -\frac{79}{60} = -1\frac{19}{60}.$$

Пример 6. $9\frac{1}{6} - 12\frac{3}{7}.$

Складываются числа с разными знаками.

Можно поступить так: выбрать слагаемое с большим модулем, поставить знак этого числа у всего выражения и вычесть из большего модуля меньший:

$$9\frac{1}{6} - 12\frac{3}{7} = -\left(12\overset{\text{6}}{\frac{3}{7}} - 9\overset{\text{7}}{\frac{1}{6}}\right) = -\left(12\frac{18}{42} - 9\frac{7}{42}\right) = -3\frac{11}{42}.$$

Или так:

$$\begin{aligned} 9\frac{1}{6} - 12\frac{3}{7} &= \left(9 + \frac{1}{6}\right) - \left(12 + \frac{3}{7}\right) = 9 + \overset{\text{7}}{\frac{1}{6}} - 12 - \overset{\text{6}}{\frac{3}{7}} = \\ &= -3 + \frac{7-18}{42} = -3 + \left(-\frac{11}{42}\right) = -\left(3 + \frac{11}{42}\right) = -3\frac{11}{42}. \end{aligned}$$

Для самых любознательных

В § 18 были разобраны некоторые примеры перевода бесконечных периодических десятичных дробей в обыкновенные. Рассмотрим ещё один такой пример.

Пример 7. Переведём в обыкновенную дробь периодическую десятичную дробь $2,433333\ldots$:

$$2,433333\ldots = 2,4 + 0,033333\ldots$$

Обозначим $0,033333\ldots = x$.

$$10x = 0,333333\ldots = 0,3 + 0,033333\ldots = 0,3 + x.$$

Решим уравнение:

$$10x = 0,3 + x;$$

$$9x = 0,3;$$

$$x = 0,3 : 9;$$

$$x = 3 : 90;$$

$$x = \frac{3}{90};$$

$$x = \frac{1}{30}.$$

$$2,4 + 0,033333\ldots = 2,4 + \frac{1}{30} = \frac{24}{10} + \frac{1}{30} = \frac{73}{30}.$$

$$\text{Значит, } 2,433333\ldots = \frac{73}{30}.$$

Подведём итоги

1. Чтобы сложить смешанные числа, можно сложить их целые части и приписать к результату сумму дробных частей.

Различные случаи сложения и вычитания рациональных чисел

2. При сложении двух отрицательных рациональных чисел можно действовать по общему правилу: поставить общий знак «—» и сложить модули чисел.
3. При сложении двух рациональных чисел с разными знаками можно действовать по общему правилу: выбрать слагаемое с бóльшим модулем, поставить знак этого числа перед всем выражением и вычесть из большего модуля меньший.
4. При сложении или вычитании рациональных чисел, содержащих целые и дробные части, можно:
 - записать каждое число в виде суммы целой и дробной частей;
 - в полученном числовом выражении раскрыть скобки;
 - сложить отдельно целые и дробные части;
 - найти сумму полученных результатов.

Проверь себя

1. Объясните каждый шаг выполнения вычитания:

$$5\frac{1}{14} - 3\overset{2}{\frac{3}{7}} = 5\frac{1}{14} - 3\frac{6}{14} = 4\frac{15}{14} - 3\frac{6}{14} = 1\frac{9}{14}.$$

2. Выполните действия:

а) $2\frac{5}{12} + 3\frac{13}{18}$; б) $1 - \frac{4}{7}$; в) $4 - 1\frac{3}{5}$; г) $2,6 - 8\frac{1}{2}$.

3. Приведите пример сложения обыкновенной дроби и десятичной, при выполнении которого удобно:

- а) десятичную дробь перевести в обыкновенную;
- б) обыкновенную дробь перевести в десятичную.

4. Решите уравнение:

а) $x - 3\frac{4}{5} = 2,5$; б) $\frac{1}{6}x - 7\frac{1}{3} = 9\frac{5}{6} + \frac{11}{12}x$.





Работаем с практикумом

Задание 1. Выберите из предложенных числовых выражений такие, значения которых меньше 35, но больше 30. Проверьте себя вычислением.

- 1) $8\frac{5}{9} + 2\frac{7}{18} + 6\frac{11}{36}$;
- 2) $13\frac{11}{25} + 10\frac{7}{15} + 9\frac{13}{18}$;
- 3) $4\frac{7}{45} + 11\frac{4}{13} + 8\frac{5}{26} + 10\frac{2}{5}$;
- 4) $4\frac{1}{7} + 2\frac{4}{9} + 12\frac{6}{7} + 3\frac{3}{11} + 10\frac{5}{9} + 1\frac{6}{11}$;
- 5) $27\frac{13}{15} + 1\frac{7}{12} + 5\frac{11}{20}$.

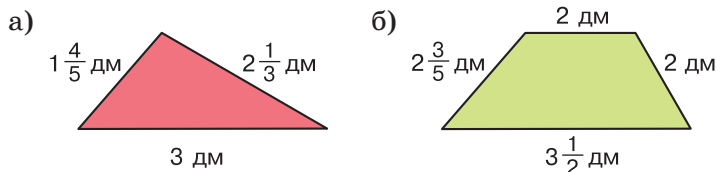
Задание 2. Представьте дробь $\frac{8}{12}$ в виде суммы:

- а) двух дробей, одна из которых больше 1;
- б) двух дробей, знаменатель одной из которых 3;
- в) трёх дробей;
- г) дробей вида $\frac{1}{n}$, где n — целое.

Задание 3. Для рациональных чисел $\frac{3}{4}$, $-\frac{35}{36}$, $\frac{5}{4}$, -1 , $-\frac{1}{2}$, 1 , $\frac{13}{20}$, 0 подберите такие числа, которые в сумме с каждым из данных составляют число:

- а) 1; б) -1 ; в) 0; г) 2.

Задание 4. Найдите периметры изображённых фигур.



Задание 5. В бидоне было $7\frac{1}{2}$ л воды. В него добавили $4\frac{3}{4}$ л воды, затем ещё 0,5 л, после чего отлили $3\frac{1}{5}$ л. Изменилось ли количество воды в ёмкости? Если да, то на сколько?

§ 25. Распределительный закон умножения на множестве рациональных чисел

В предыдущих параграфах мы говорили о том, что для рациональных чисел выполняются переместительный и сочетательный законы сложения и умножения.

Вспомним ещё про один закон — распределительный.

Для всех рациональных чисел выполняется распределительный закон умножения:

$$(a + b)c = ac + bc$$

Ранее мы применяли распределительный закон в следующих основных ситуациях:

- I. Для упрощения вычислений в числовых выражениях.
- II. Для преобразования буквенных выражений — при приведении подобных слагаемых и раскрытии скобок.

Рассмотрим примеры использования распределительного закона в этих ситуациях для рациональных чисел.

I. Упрощение вычислений

Пример 1. Найдём произведение: $6 \cdot 4\frac{2}{3}$.

Можно действовать по общему правилу, переведя смешанное число в неправильную дробь:

$$6 \cdot 4\frac{2}{3} = 6 \cdot \frac{14}{3} = \frac{6 \cdot 14}{3} = \frac{28}{1} = 28,$$

или воспользоваться распределительным законом:

$$6 \cdot 4\frac{2}{3} = 6 \cdot \left(4 + \frac{2}{3}\right) = 6 \cdot 4 + \frac{6 \cdot 2}{3} = 24 + 4 = 28.$$





Итак, найти произведение целого и смешанного чисел можно следующим способом: умножить целое число сначала на целую часть смешанного числа, затем на дробную и результаты сложить. Запись может быть совсем короткой, например:

$$7 \cdot 5 \frac{3}{4} = 35 \frac{21}{4} = 40 \frac{1}{4}.$$

Пример 2. Найдём произведение: $99 \frac{4}{5} \cdot 5$.

Применим распределительный закон, представив первый множитель в виде разности:

$$99 \frac{4}{5} \cdot 5 = \left(100 - \frac{1}{5}\right) \cdot 5 = 500 - 1 = 499.$$

Пример 3. Найдём значение выражения:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}.$$

Применим распределительный закон «справа на лево» — в каждом слагаемом есть один и тот же множитель $\frac{4}{3}$, вынесем этот общий множитель за скобку:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{3}{8} + \left(\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{1}{8} + \left(\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{3}{2} &= \left(\frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{4}{8} + \frac{3}{2}\right) = \\ &= \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3} \cdot 2 = \frac{8}{3} = 2 \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

II. Преобразование буквенных выражений

Пример 4. Приведём подобные слагаемые:

$$\text{а) } \frac{5}{12}x - \frac{11}{15}x; \quad \text{б) } \frac{4}{9}y - \frac{5}{12} - \frac{11}{15}y - \frac{3}{8}.$$

Вспомним (§ 3): подобные слагаемые имеют одинаковую буквенную часть, благодаря распределительному закону мы можем упрощать их сумму — приводить подобные слагаемые. Для этого нужно сложить числовые коэффициенты и умножить ре-

зультат на общую буквенную часть.

$$\text{а) } \frac{5}{12}x - \frac{11}{15}x = \left(\frac{\overset{5}{5}}{12} - \frac{\overset{4}{11}}{15} \right) x = \frac{25 - 44}{60}x = -\frac{19}{60}x;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \frac{\overset{5}{4}}{9}y - \frac{\overset{2}{5}}{12} - \frac{\overset{3}{11}}{15}y - \frac{\overset{3}{3}}{8} &= \frac{20}{45}y - \frac{10}{24} - \frac{33}{45}y - \frac{9}{24} = \\ &= -\frac{13}{45}y - \frac{19}{24}. \end{aligned}$$

Пример 5. Раскроем скобки в выражении $-\frac{5}{8}\left(\frac{4}{15}x - 2\frac{2}{5}\right)$.

$$\begin{aligned} -\frac{5}{8} \cdot \left(\frac{4}{15}x - 2\frac{2}{5}\right) &= -\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{15}x + \left(-\frac{5}{8}\right) \cdot \left(-2\frac{2}{5}\right) = \\ &= -\frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 15}x + \frac{5 \cdot 12}{8 \cdot 5} = -\frac{1}{6}x + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Подведём итоги

1. Для рациональных чисел выполняется распределительный закон умножения: $(a + b)c = ac + bc$.
2. Чтобы найти произведение целого и смешанного чисел, можно умножить это целое число сначала на целую часть смешанного числа, затем на дробную и результаты сложить.

Проверь себя

1. Найдите значение каждого выражения двумя способами:

$$\text{а) } 3\frac{5}{16} \cdot 4; \quad \text{б) } 4\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} + 5\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}; \quad \text{в) } \left(\frac{6}{7} - \frac{3}{5}\right) \cdot 35.$$

2. Заполните пропуски в записи раскрытия скобок:

$$-\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{5}{8}x - \frac{6}{7}\right) = \dots \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 8}x \dots \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 7} = \dots x + \dots$$

3. Упростите выражение:

$$\text{а) } \frac{5}{12}x + \frac{7}{18}x - \frac{2}{9}x;$$

$$\text{б) } \frac{2}{3} \cdot \left(1\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}\right) - 0,8 \cdot \left(\frac{5}{12}x - \frac{1}{2}\right).$$





4. Решите уравнение:

$$\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{15}x - \frac{5}{6} \right) - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{8}x + \frac{1}{2} \right) = 0.$$

www



Работаем с практикумом

Задание 1. Заполните пропуски числами или знаками действий и найдите значение выражения:

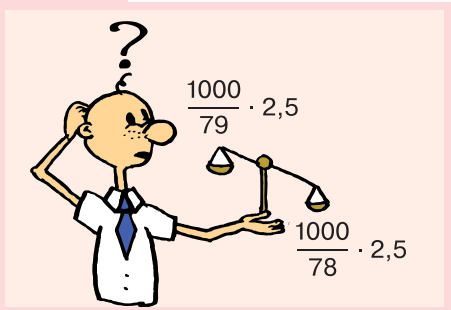
- 1) $\frac{7}{8} \left(\frac{1}{4} + \dots \right) = \dots \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8} = \dots;$
- 2) $\left(\frac{4}{8} - \dots \right) \cdot 2 = \frac{4}{8} \cdot 2 \dots \frac{1}{8} \dots = \dots;$
- 3) $\left(-2 \frac{1}{3} + \dots \right) \cdot \frac{13}{2} = \dots \frac{13}{2} + \frac{1}{3} \dots = \dots;$
- 4) $\left(3 + \frac{7}{5} \right) \cdot \frac{25}{22} = 3 \frac{7}{5} \dots = \dots;$
- 5) $\dots \cdot \left(8 - \frac{12}{5} \right) = \frac{5}{28} \cdot 8 - \frac{5}{28} \dots = \dots;$
- 6) $7 \cdot \frac{1}{3} + \dots \cdot \frac{4}{3} = 7 \cdot \left(\frac{1}{3} \dots \frac{4}{3} \right) = \dots;$
- 7) $-\frac{11}{4} \cdot 5 - \frac{5}{4} \dots = \left(\dots - \frac{5}{4} \right) \cdot 5 = \dots;$
- 8) $\frac{13}{5} \cdot (-6) + \frac{2}{5} \dots = \left(\frac{13}{5} + \frac{2}{5} \right) \dots 6 = \dots.$

Задание 2. Вычислите:

$$\frac{142,7 \cdot 8 \frac{1}{2} - 4,27 \cdot 85}{34 \cdot 1 \frac{47}{50} + 3 \frac{2}{5} \cdot 10 \frac{3}{5}}.$$

Задание 3. Сравните значения выражений:

- а) $\frac{1000}{79} \cdot 2,5$ и $\frac{1000}{78} \cdot 2,5;$
- б) $13,45 \cdot 0,8$ и $13,45 \cdot 0,801;$
- в) $500,2 : \frac{19}{118}$ и $500,2 \cdot \frac{19}{118};$
- г) $431,59 \cdot 1 \frac{3}{4}$ и $431,59 : 1 \frac{3}{4};$
- д) $0,001 \cdot \frac{1}{20}$ и $0,001 \cdot \frac{1}{21}.$



ГЛАВА 8

ОТНОШЕНИЯ. ПРОПОРЦИИ. ПРОЦЕНТЫ

§ 26. Отношение чисел. Деление числа в данном отношении

В одном из рецептов поваренной книги написано: «Чтобы сварить рассыпчатую гречневую кашу, нужно взять крупу и воду в отношении $1:2$ по объёму». Сколько же именно гречневой крупы и сколько воды нужно взять, чтобы сварить кашу по этому рецепту?

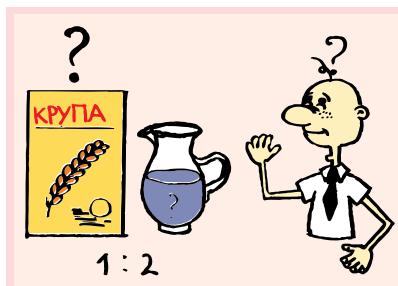
В рецепте говорится: «в отношении $1:2$ ». Это значит, что на одну меру крупы нужно взять две такие же меры воды. То есть, например, на 1 стакан крупы 2 стакана воды.

В качестве общей меры можно взять и любой другой объём, например, 5 стаканов. Тогда крупы будет 5 стаканов (1 мера), а воды 10 стаканов (2 меры).

Отношение двух величин не случайно записывается с помощью знака деления.

Отношением числа a к числу b (a и b не равны 0) называют частное от деления числа a на число b ; записывается: $a:b$ или $\frac{a}{b}$.

Значит, фраза «взять крупу и воду в отношении $1:2$ по объёму» означает, что нужно взять такие объёмы крупы и воды, чтобы их частное равнялось $\frac{1}{2}$.



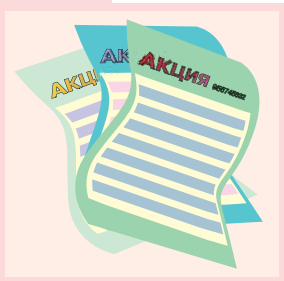
Например:

$$5 \text{ ст. и } 10 \text{ ст.: } 5 : 10 = \frac{1}{2};$$

$$2 \text{ ст. и } 4 \text{ ст.: } 2 : 4 = \frac{1}{2};$$

$$0,75 \text{ ст. и } 1,5 \text{ ст.: } 0,75 : 1,5 = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{4} \text{ ст. и } \frac{1}{2} \text{ ст.: } \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ и так далее.}$$



Решим задачу.

Два акционера вложили деньги в проект: первый вложил 200 тыс.руб., а второй 300 тыс.руб. Получена прибыль 600 тыс.руб. Как эту прибыль по справедливости разделить между акционерами?

Прибыль принято делить в таком же отношении, в каком были вложены деньги. Найдём отношение вложенных денег:

$$\frac{200}{300} = \frac{2}{3}.$$

Итак, 600 тыс.руб. нужно разделить в отношении 2 : 3.

- 1) $2 + 3 = 5$ (частей);
- 2) $600 : 5 = 120$ (тыс.руб.) — величина одной части прибыли;
- 3) $2 \cdot 120 = 240$ (тыс.руб.) — прибыль первого акционера;
- 4) $3 \cdot 120 = 360$ (тыс.руб.) — прибыль второго акционера.

Эту задачу можно было решить и другим способом — с помощью уравнения.

Пусть x тыс.руб. — общая мера.

Отношение чисел. Деление числа в данном отношении

Тогда прибыль первого акционера — это $2x$ (тыс. руб.), а прибыль второго — это $3x$ (тыс. руб.).

Вся прибыль составляет $(2x + 3x)$ тыс. рублей, что по условию задачи равно 600 тыс. руб. Получаем уравнение:

$$2x + 3x = 600;$$

$$5x = 600;$$

$$x = 120.$$

Прибыль первого акционера:

$$2x = 2 \cdot 120 = 240 \text{ (тыс. руб.)},$$

прибыль второго:

$$3x = 3 \cdot 120 = 360 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Проверим: отношение вложенных денег $\frac{200}{300} = \frac{2}{3}$,
отношение полученных прибылей $\frac{240}{360} = \frac{2}{3}$.

Задача решена верно.

Ответ: первый акционер должен получить 240 тыс. руб., а второй 360 тыс. руб.

Подведём итоги

Отношением числа a к числу b (a и b не равны 0) называют частное от деления числа a на число b ; записывается: $a : b$ или $\frac{a}{b}$.

Проверь себя



1. Даны отношения двух чисел:

а) $5 : 3$; б) $1 : 1$; в) $2 : 3$; г) $1 : 5$; д) $3 : 1$.

Какие из этих отношений показывают, что:

- а) первое число меньше второго;
- б) числа равны;



- в) первое число в три раза больше второго;
г) одно из чисел кратно другому?
2. Для приготовления яблочного джема нужно взять яблоки и сахар в отношении $5 : 6$ (по массе). Сколько сахара потребуется на 1 кг яблок?
3. Начертите отрезок длиной 10 см. Разделите этот отрезок на две части, длины которых относятся как $1 : 4$.
4. Начертите отрезок длиной 12 см. Разделите этот отрезок на три части, длины которых относятся как $1 : 2 : 3$.



Работаем с практикумом

Задание 1. Самый большой среди китов — синий кит — ежедневно съедает 4 т планктона. Найдите отношение массы съедаемого планктона к массе кита, если он весит 160 т. Какую часть массы кита составляет съедаемый за неделю планктон?

Задание 2. Начертите два квадрата, длины сторон которых находятся в отношении $3 : 1$. Определите, отношение их площадей. А каково отношение площадей квадратов, длины сторон которых относятся как $2 : 5$?



Задание 3. Два числа находятся в отношении $7 : 3$. Найдите оба числа, если известно, что:

- а) сумма этих чисел равна 90;
б) разность этих чисел равна 36;
в) первое число равно 35;
г) второе число равно 21;
д) одно число больше другого на 64.

§ 27. Пропорция

В предыдущем параграфе мы рассматривали равенство двух отношений — вложенных денег и полученных прибылей:

$$\frac{200}{300} = \frac{240}{360}.$$

Равенство двух отношений называется пропорцией.
Записывается:

$$a : b = c : d \text{ или } \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

при этом числа a и d называются крайними членами пропорции, а числа b и c — средними членами пропорции.

Равенство $\frac{200}{300} = \frac{240}{360}$ является пропорцией, так как оба отношения равны одному и тому же числу:

$$\frac{200}{300} = \frac{2}{3} \text{ и } \frac{240}{360} = \frac{2}{3}.$$

Запишем ещё несколько пропорций:

$$\frac{2}{9} = \frac{4}{18}; \quad 4,8 : 1,2 = 3,6 : 0,9; \quad \frac{2}{3} : \frac{5}{6} = \frac{4}{3} : \frac{5}{3}.$$

(Проверьте, что все эти равенства являются пропорциями.)

Обратите внимание на важную особенность:

$\frac{2}{9} = \frac{4}{18}$ произведение крайних членов: $2 \cdot 18 = 36,$ произведение средних членов: $9 \cdot 4 = 36.$	$4,8 : 1,2 = 3,6 : 0,9$ произведение крайних членов: $4,8 \cdot 0,9 = 4,32,$ произведение средних членов: $1,2 \cdot 3,6 = 4,32.$	$\frac{2}{3} : \frac{5}{6} = \frac{4}{3} : \frac{5}{3}$ произведение крайних членов: $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{9},$ произведение средних членов: $\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{3} = \frac{10}{9}.$
---	---	---

Эти примеры иллюстрируют *основное свойство пропорции*.



В пропорции произведения крайних и средних членов равны:

$$\text{если } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } a \cdot d = b \cdot c.$$

$$\text{И обратно: если } a \cdot d = b \cdot c, \text{ то } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Доказательство этих утверждений будет проведено в 7 классе.

С помощью пропорций можно решать многие задачи.

Задача 1. Самолёт на крейсерской скорости пролетает 1350 км за 1,5 ч. Какое расстояние он пролетает за 5 ч с такой же скоростью?

Пусть искомое расстояние равно x км.

Скорость самолёта можно найти двумя способами: разделив 1350 км на 1,5 ч или разделив x км на 5 ч, при этом должны получиться одинаковые результаты:

$$\frac{1350}{1,5} = \frac{x}{5}.$$

Воспользуемся основным свойством пропорции:

$$1,5x = 1350 \cdot 5;$$

$$x = \frac{1350 \cdot 5}{1,5};$$

$$x = \frac{13\,500 \cdot 5}{15};$$

$$x = 4500.$$

Можно было рассуждать по-другому.

Если при постоянной скорости время движения увеличивается в некоторое число раз, то и пройденный путь увеличивается в такое же число раз. Такие величины называются *прямо пропорциональными*.

Время	Путь
1,5 ч	1350 км
5 ч	x км

Составим пропорцию и решим полученное уравнение:

$$\begin{aligned}\frac{1,5}{5} &= \frac{1350}{x}; \\ 1,5x &= 1350 \cdot 5; \\ x &= 4500.\end{aligned}$$

Ответ: за 5 ч самолёт пролетит 4500 км.

Задача 2. На фотографии мы видим здание и стоящего возле него мальчика. Рост мальчика 80 см. Какая высота здания, если его изображение на фотографии имеет высоту 9 см, а изображение мальчика — 1,2 см?

Пусть высота здания x м.

Реально	На фотографии
0,8 м	1,2 см
x м	9 см

Во сколько раз больше реальный размер, во столько же раз больше изображение на фотографии (эти величины прямо пропорциональны).

$$\begin{aligned}\frac{0,8}{x} &= \frac{1,2}{9}; \\ 1,2x &= 0,8 \cdot 9; \\ x &= \frac{0,8 \cdot 9}{1,2} \\ x &= 6.\end{aligned}$$

Ответ: высота здания 6 м.

Задача 3. В 6-х классах 30 человек собирались поехать на экскурсию, при этом для оплаты автобуса нужно было бы собрать с каждого по 300 руб. Однако на экскурсию поехали 40 человек. Сколько

денег должен заплатить каждый экскурсант, если общая сумма оплаты автобуса осталась прежней?

Пусть каждый из 40 экскурсантов должен заплатить x руб.

Количество человек	Стоимость экскурсии для каждого
30 чел	300 руб.
40 чел	x руб.

Во сколько раз больше число экскурсантов, во столько же раз меньше стоимость экскурсии для каждого. (Такие величины называются *обратно пропорциональными*.) Отношение числа экскурсантов равно обратному отношению соответствующих значений стоимости экскурсии.

$$\begin{aligned}\frac{30}{40} &= \frac{x}{300}; \\ x &= \frac{30 \cdot 300}{40}; \\ x &= 225.\end{aligned}$$

Ответ: каждый экскурсант должен заплатить 225 руб.

Подведём итоги

1. Равенство двух отношений называется *пропорцией*.
Записывается: $a : b = c : d$ или $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,
при этом числа a и d называются *крайними членами*,
а числа b и c — *средними членами пропорции*.
2. В пропорции произведения крайних и средних членов равны:
если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $a \cdot d = b \cdot c$.
3. Если две величины связаны таким образом, что при увеличении (уменьшении) одной из них в любое чис-

ло раз, другая величина увеличивается (уменьшается) в такое же число раз, то такие величины называются прямо пропорциональными.

4. Если две величины связаны таким образом, что при увеличении (уменьшении) одной из них в любое число раз, другая величина уменьшается (увеличивается) в такое же число раз, то такие величины называются обратно пропорциональными.
5. Если две величины прямо пропорциональны, то отношения их соответствующих значений равны.
6. Если две величины обратно пропорциональны, то отношение значений одной величины равно обратному отношению соответствующих значений другой величины.

Проверь себя



1. Даны пропорции:

а) $\frac{4}{12} = \frac{12}{48}$; б) $1 \frac{9}{15} : 2 \frac{2}{5} = 1 \frac{1}{3} : \frac{8}{9}$.

Какими способами можно проверить, являются ли эти равенства пропорциями? Проверьте первую пропорцию одним способом, а вторую — другим.

2. Заполните пропуски так, чтобы равенства были пропорциями:

а) $\frac{2}{9} = \frac{4}{\dots}$; б) $8 : \dots = \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$.

3. Решите уравнения:

а) $\frac{12}{x} = \frac{24}{3}$; б) $\frac{0,15}{2,8} = \frac{y}{4,2}$; в) $5 \frac{3}{5} : 3 \frac{1}{2} = 5 \frac{1}{4} : x$.

4. Решите задачи с помощью составления пропорции:

- а) Чтобы сварить вишнёвое варенье, нужно на 2 кг ягод взять 3 кг сахара. Сколько сахара нужно взять на 5 кг ягод?



- б) Рабочий выполнил заказ за 6 дней, обрабатывая за день 30 деталей. За сколько дней он выполнил бы этот заказ, если бы обрабатывал в день по 36 деталей?



Работаем с практикумом

Задание 1. Даны три отрезка, длины которых: $a = 2$ см, $b = 2,6$ см, $c = 3$ см. Постройте такой четвёртый отрезок длины d , чтобы можно было составить пропорцию $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Задание 2. Дана пропорция $16 : 8 = 130 : 65$.

Выясните, получится ли вновь пропорция, если:

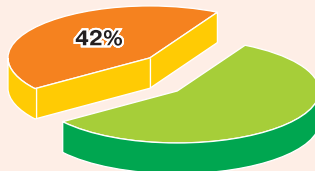
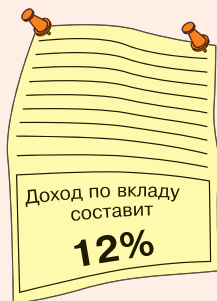
- поменять местами средние члены данной пропорции;
 - поменять местами крайние члены пропорции;
 - переставить одновременно крайние и средние члены данной пропорции;
 - увеличить в три раза оба члена отношения, находящиеся в левой части данного равенства;
 - уменьшить в пять раз оба члена отношения, записанного в правой части данного равенства;
 - увеличить в полтора раза первый крайний и второй средний члены пропорции;
 - увеличить все члены пропорции в три раза?
- Сформулируйте полученные результаты в общем виде для пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.



Задание 3. Масштаб карты $1 : 6\,000\,000$ (это отношение расстояний на карте и соответствующих расстояний на местности). Найдите расстояние от Москвы до Новосибирска, если на карте их разделяет 47 см.

§ 28. Проценты

Наверное, вы слышали такое слово — «процент»? Может быть, вам встречались такие записи: 6%, 12%? Давайте разберёмся, что они означают.



Решим задачу.

Задача 1. Предприниматель хочет вложить в дело некоторую сумму денег. В одном проекте ему предлагают на каждые 100 руб. вложенных денег прибыль 19 руб. В другом — на каждую единицу товара за 1300 руб. прибыль в 260 руб. В третьем — с суммы 50 000 руб. прибыль 9000 руб. Какой проект выгоднее для предпринимателя?

Чтобы сравнить доходность проектов, нужно сравнить отношения: $\frac{19}{100}$; $\frac{260}{1300}$ и $\frac{9000}{50000}$. Выразим эти отношения в десятичных дробях:

$$\frac{19}{100} = 0,19; \quad \frac{260}{1300} = 0,2 = 0,20; \quad \frac{9000}{50000} = 0,18.$$

Итак, прибыль в первом проекте составляет 19 сотых от вложенной суммы (19 руб. прибыли на каждые вложенные 100 руб.).



Прибыль во втором проекте составляет 20 сотых от вложенной суммы (20 руб. прибыли на каждые вложенные 100 руб.).

Прибыль в третьем проекте составляет 18 сотых от вложенной суммы (18 руб. прибыли на каждые вложенные 100 руб.).

Ответ: для предпринимателя выгоднее второй проект.

Решая задачу, мы находили доход на каждые сто рублей. В средневековых торговых книгах, если прибыль составляла $\frac{19}{100}$ от вложенной суммы, писали «девятнадцать со ста». «Со ста» на латинском языке будет «pro centum». С течением времени латинское «pro centum» превратилось в «pro cento», потом в «procent». В русский язык вошло слово «процент».

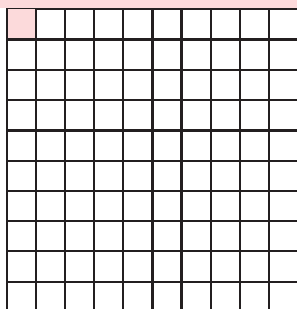
Вместо фразы: «Прибыль составляет 19 сотых от вложенной суммы» можно сказать: «Прибыль составляет 19 процентов от вложенной суммы».

Для обозначения процентов принят специальный знак: «%». Например, 19%, 20%, 18%, 200%, 3,5%.

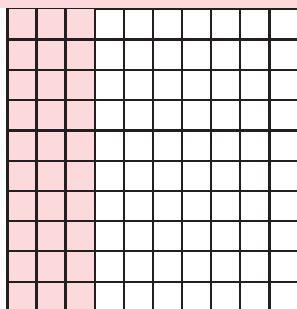
Таким образом, *один процент — это одна сотая часть данной величины.*

$$\frac{5}{100} \text{ от } 200 \text{ руб.: } 5\% \text{ от } 200 \text{ руб.}$$

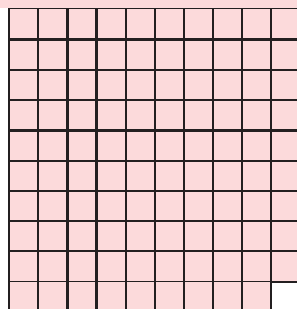
$$0,56 \text{ от } 18: 56\% \text{ от } 18.$$



1%



30%



99%

Так как 1% — это $\frac{1}{100}$ от заданной величины, то вся величина составляет 100% $\left(\frac{100}{100}\right)$.

Подведём итоги

Один процент — это одна сотая часть данной величины.

Проверь себя



1. Заполните таблицу:

Запись в виде		
обыкновенной дроби	десятичной дроби	процента
$\frac{4}{100}$	0,04	4%
		25%
	0,8	
$\frac{3}{4}$		
		150%

2. Нарисуйте три одинаковых квадрата. Закрасьте на первом рисунке 50% квадрата, на втором — 25%, на третьем — 100%.

Работаем с практикумом



www

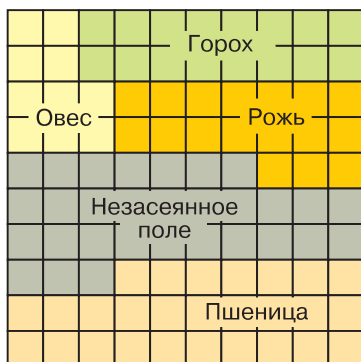
Задание 1. Постройте отрезок длиной 10 см. Изобразите отрезок, длина которого составляет от данной длины:

- а) 50%; б) 25%; в) 75%; г) 40%
 д) 10%; е) 5%; ж) 100%; з) 120%.

Задание 2. Запишите, какую часть от площади всего участка составляет площадь каждого поля, используя:

- а) десятичные дроби; б) обыкновенные дроби;
в) проценты.

Какой процент составляет площадь поля, засеянного овсом, от площади поля, засеянного горохом?



Задание 3. Рассмотрите шахматную доску и определите, сколько процентов от площади всей доски составляет площадь всех чёрных клеток? Сколько процентов составляет площадь одной клетки от площади всех клеток доски?



Задание 4. Какие высказывания означают одно и то же:

- а) зарплата повысилась на $\frac{1}{3}$;
б) зарплата увеличилась на 30 рублей;
в) зарплата повысилась на 30%;
г) новая зарплата составляет 130% от старой;
д) зарплата увеличилась в 1,3 раза?

Задание 5. Проиллюстрируйте с помощью рисунка:

- а) увеличение на 10%; б) уменьшение на 50%;
в) уменьшение на 20%; г) увеличение на 100%;
д) увеличение в 1,5 раза; е) увеличение в 2 раза;
ж) увеличение на 50%; з) уменьшение на 100%.

§ 29. Задачи на проценты

Проценты часто используются на практике. Решим несколько задач.

Задача 2. *Недельная норма токаря составляет 80 деталей. За первый день он выполнил 15% нормы. Сколько деталей токарь обработал за первый день?*



Рассмотрим разные способы решения этой задачи.

I способ (через нахождение 1%).

Вся недельная норма 80 деталей — это 100%.

Чтобы найти 1% от нормы, нужно 80 разделить на 100:

$$80 : 100 = 0,8 \text{ (деталей)} — 1\% \text{ нормы.}$$

Чтобы узнать, сколько деталей составляют 15% нормы, нужно полученный результат умножить на 15:

$$0,8 \cdot 15 = 12 \text{ (деталей).}$$

II способ (нахождение части от числа).

15% от нормы — это 0,15 от нормы. Чтобы найти 0,15 от 80 (часть от числа), нужно выполнить умножение:

$$0,15 \cdot 80 = 12 \text{ (деталей).}$$

III способ (с помощью пропорции).

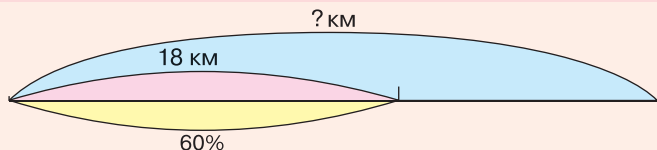
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & 100\% — 80 \text{ деталей,} & \uparrow \\ & 15\% — x \text{ деталей.} & \end{array}$$

Процент и соответствующее этому проценту число — прямо пропорциональные величины. Составим пропорцию:

$$\begin{aligned}\frac{100}{15} &= \frac{80}{x}; \\ x &= \frac{15 \cdot 80}{100}; \\ x &= 12.\end{aligned}$$

Ответ: за первый день токарь обработал 12 деталей.

Задача 3. Туристы прошли 18 км, что составляет 60% длины всего маршрута. Какова длина всего маршрута?



I способ.

18 км — это 60% длины всего маршрута.

Чтобы найти 1% длины маршрута, нужно 18 разделить на 60:

$18 : 60 = 0,3$ (км), что составляет 1% длины маршрута.

Чтобы найти длину всего маршрута (100%), нужно умножить полученный результат на 100:

$$0,3 \cdot 100 = 30 \text{ (км)}.$$

II способ.

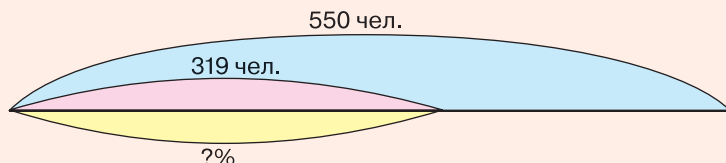
18 км — это 60%, то есть 0,60 (0,6) всего маршрута. Чтобы по известной части найти целое, нужно выполнить деление:

$$18 : 0,6 = 180 : 6 = 30 \text{ (км)}.$$

Ответ: длина всего маршрута составляет 30 км.

(Самостоятельно решите эту задачу третьим способом — с помощью составления пропорции.)

Задача 4. В школе 550 учеников. Из них 319 учатся без «троек». Какой процент учащихся учится без «троек»?



I способ. Общее число учеников 550 соответствует 100%. $550 : 100 = 5,5$ (чел.), что составляет 1% от общего числа учеников. Узнаем, во сколько раз 319 больше, чем 5,5:

$$319 : 5,5 = 58.$$

Значит, 58% учеников учатся без «троек».

II способ. Найдём отношение числа учеников, которые учатся без «троек», к общему числу учеников и выразим это отношение в процентах:

$$\frac{319}{550} = 0,58.$$

Это соответствует 58%.

Ответ: без «троек» учится 58% всех учеников.

(Самостоятельно решите эту задачу с помощью составления пропорции.)

Подведём итоги

1. Найти процент от числа можно умножением этого числа на дробь, соответствующую данному проценту.
2. Найти целое по его проценту можно делением данного числа на дробь, соответствующую данному проценту.



Проверь себя



1. Найдите:
 - а) 38% от 120;
 - б) число, если его 12% равны 90;
 - в) 3,2% от 40;
 - г) какой процент составляет 10 от 125?
2. Что больше: 30% от 120 или 60% от 50?
3. Товар стоил 100 руб. Его цена повысилась на 10%, а затем снизилась на 10%. Как изменилась в результате цена товара по сравнению с первоначальной?



Работаем с практикумом



Задание 1. Магазин продал 37,5% полученных со склада пар лыж, после чего в магазине осталось 120 пар.

- 1) Сколько пар лыж было получено магазином?
- 2) Сколько пар лыж было продано?



Задание 2.

- 1) Цена товара снизилась в два раза. На сколько процентов снизилась цена? Сделайте рисунок.
- 2) Цена товара возросла вдвое. Сколько процентов составляет новая цена от старой? На сколько процентов возросла цена? Сделайте рисунок.

Задание 3.

- 1) Джинсы стоили 730 р. Цену на них сначала подняли на 15%, а затем снизили на 10%. Сколько стали стоить джинсы? На сколько процентов увеличилась цена джинсов по сравнению с первоначальной?
- 2) Джинсы стоили 650 р. Цену на них увеличили на 25%. На сколько процентов нужно уменьшить новую цену, чтобы вернуть её к первоначальной?

ПРОВЕРЬТЕ СВОИ ЗНАНИЯ, ОТВЕТИВ НА ВОПРОСЫ

Итак, мы закончили изучение темы «Рациональные числа».



1. Могут ли в числителе и знаменателе несократимой дроби стоять чётные числа?
2. Являются ли целые числа рациональными?
3. Могут ли в числитель и знаменатель несократимой дроби быть составными числами?
4. Для всякого ли рационального числа существует обратное число?
5. Какое число больше: $-\frac{998}{999}$ или $-0,999$?
6. Можно ли квадрат разрезать на две части так, чтобы части составляли $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{8}$ квадрата?
7. Что больше: $\frac{7}{9}$ от положительного числа или 70% от этого же числа?
8. Можно ли указать наименьшую и наибольшую неправильные дроби со знаменателем 29?
9. Существует ли дробь со знаменателем 10, которая больше $\frac{7}{9}$ и меньше $\frac{8}{9}$?
10. Являются ли взаимно обратными модули взаимно обратных дробей?
11. Может ли целое неотрицательное число быть меньше правильной дроби?
12. За час выполнили $\frac{3}{7}$ части работы. За какое время при такой же производительности будет выполнена вся работа?
13. Какое число надо умножить на $-\frac{3}{4}$, чтобы получилось 24?
14. Какое число нужно разделить на 30, чтобы получилось $-\frac{2}{3}$?

Проверьте свои знания, ответив на вопросы

15. Может ли при вычитании дробей получиться разность, которая: больше уменьшаемого? больше вычитаемого?
16. Может ли при вычитании дробей получиться разность, которая: равна уменьшаемому? равна вычитаемому?
17. Может ли произведение двух дробей быть:
 - а) меньше первой дроби;
 - б) больше второй дроби;
 - в) равным каждой дроби;
 - г) больше каждой из дробей;
 - д) меньше хотя бы одной из дробей;
 - е) равным единице?
18. Может ли при сложении трёх дробей получиться сумма, меньшая каждого из слагаемых?
19. Верно ли, что:
 - а) «Существует такое число, что, если его вычесть из -2 , то разность будет числом, противоположным уменьшаемому»;
 - б) «Существует такое число, что, если его вычесть из -2 , то разность будет числом, противоположным числу, обратному уменьшаемому».
20. По карте с масштабом $1 : 500\,000$ расстояние от посёлка до реки составляет 3 см. Каково реальное расстояние?
21. Число a составляет 1000% от числа b . Какое число больше и во сколько раз?
22. Выберите большее: $1000\,000 + \frac{8}{9}$; $1000\,000 - \frac{8}{9}$;
 $1000\,000 \cdot \frac{8}{9}$; $1000\,000 : \frac{8}{9}$.
23. Поделите 1000 рублей в отношении $1 : 3 : 4$.
24. Сколько минут в пяти сотых часа?
25. Сколько двадцатых содержится в $\frac{3}{5}$?
26. Сколько сантиметров в $\frac{1}{8}$ части метра?

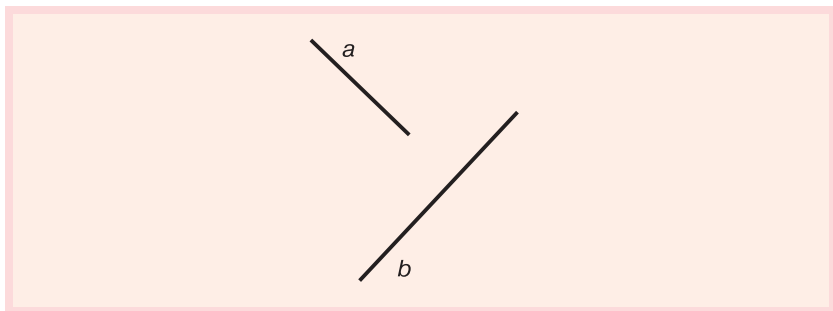
СИСТЕМА КООРДИНАТ. ДИАГРАММЫ. СИММЕТРИЯ

ГЛАВА 9

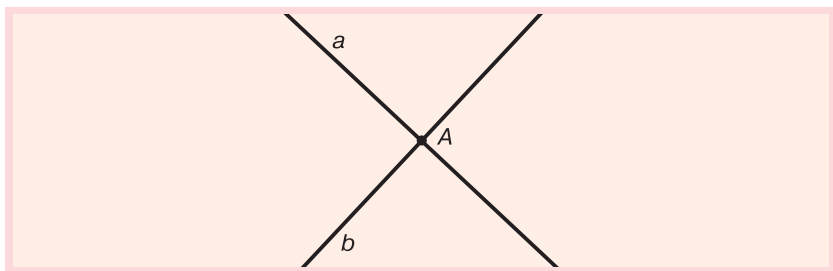
СИСТЕМА КООРДИНАТ. ДИАГРАММЫ

§ 30. Перпендикулярные и параллельные прямые

На плоскости проведены две прямые a и b . Будут ли эти прямые пересекаться?



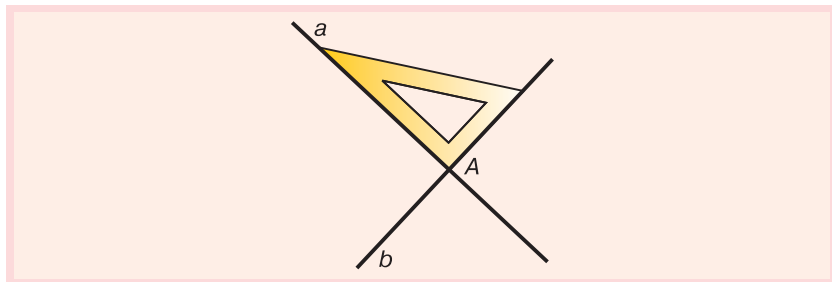
Да, будут, ведь каждая прямая продолжается бесконечно в обе стороны:



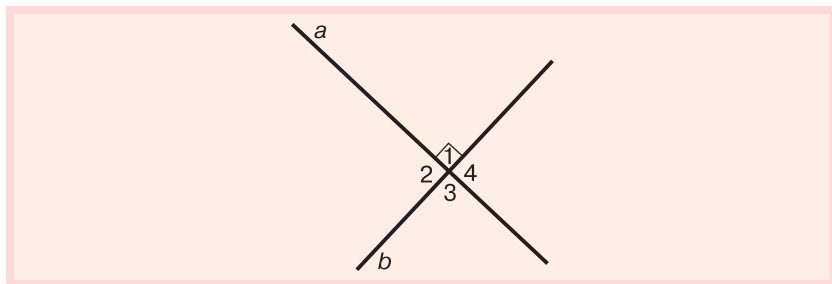
Говорят, что прямые a и b имеют общую точку A или что прямые a и b пересекаются в точке A .

Данные прямые a и b не просто пересекаются, а *пересекаются под прямым углом*. Приложив уголь-

ник (или используя транспортир), убедитесь, что при пересечении этих прямых образуется прямой угол:



С помощью угольника вы можете убедиться, что будут прямыми и три остальных неразвёрнутых угла, которые образовались при пересечении этих прямых. Можно в этом убедиться и без использования чертёжных инструментов, с помощью рассуждений.



Действительно:

если $\angle 1 = 90^\circ$, то

$$\angle 2 = 180^\circ - \angle 1 = 90^\circ,$$

$$\angle 4 = 180^\circ - \angle 1 = 90^\circ,$$

$$\angle 3 = 180^\circ - \angle 2 = 90^\circ,$$

значит, каждый из углов 1, 2, 3 и 4 равен 90° , то есть все эти углы прямые.

(Объясните, как найден каждый из углов 2, 3, 4.)



Если две прямые при пересечении образуют прямой угол, то такие прямые называются перпендикулярными.

Обозначается: $a \perp b$.

На рисунке изображены ещё две прямые: c и d . Будут ли они пересекаться?



Если мы попробуем продолжать изображённые части прямых, то очень скоро нас остановят края листа учебника:

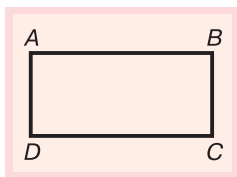


Может, общая точка у этих прямых все-таки найдётся, просто она очень далеко? Но представьте себе, что мы продолжаем эти прямые всё дальше и дальше, а они так и «идут рядом», не приближаясь друг к другу и не удаляясь. И как бы далеко мы ни продолжали эти прямые, они никогда не пересекутся. Такие прямые называют *параллельными* (от греческого слова *παράλληλος* — «идущие рядом»).



Параллельными прямыми на плоскости называются две прямые, которые не имеют общей точки (не пересекаются).

Обозначается: $c \parallel d$.

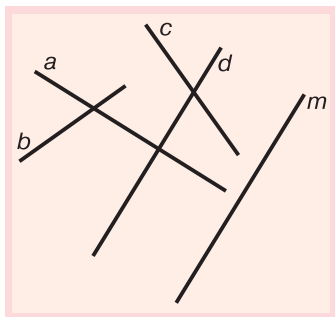


Также параллельными называют и отрезки, лежащие на параллельных прямых. Например, параллельны противоположные стороны прямоугольника: $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$.

Подведём итоги

1. Если две прямые при пересечении образуют прямой угол, то такие прямые называются перпендикулярными. Обозначается: $a \perp b$.
2. Если две прямые на плоскости не имеют общей точки (не пересекаются), то они называются параллельными. Обозначается: $c \parallel d$.

Проверь себя



1. Найдите на рисунке три пары перпендикулярных прямых. Проверьте свой глазомер с помощью угольника или транспортира:
2. Начертите прямую a и отметьте на ней точку B . С помощью угольника постройте прямую, проходящую через

точку B и перпендикулярную прямой a .

3. Начертите прямую a и отметьте точку B , не лежащую на этой прямой. С помощью угольника постройте прямую, проходящую через точку B и перпендикулярную прямой a . Выделите отрезок построенной прямой от точки B до прямой a . Этот отрезок называется *перпендикуляром, опущенным из точки B на прямую a* .
4. Начертите произвольную прямую a и отметьте точки B и C , не лежащие на этой прямой. Проведите

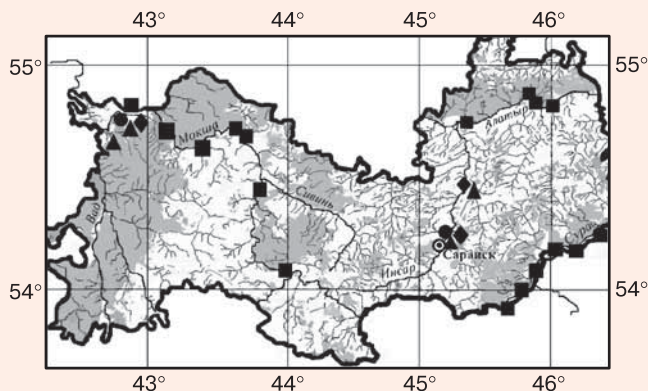
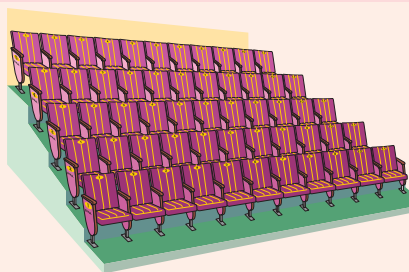
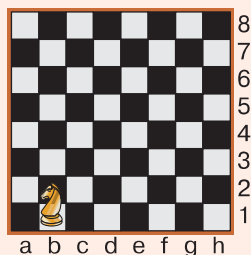


через точки B и C прямые, параллельные прямой a (на глаз).

5. Начертите остроугольный треугольник ABC . Проведите через каждую вершину треугольника прямую, перпендикулярную противоположной стороне (если вы аккуратно выполните построения, то все три проведённые прямые пересекутся в одной точке).

§ 31. Прямоугольная система координат

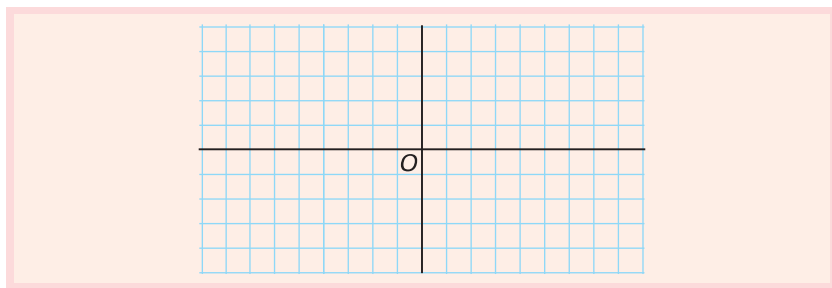
Почему шахматная доска, зрительный зал и географическая карта оказались на одном рисунке? Что у них общего?



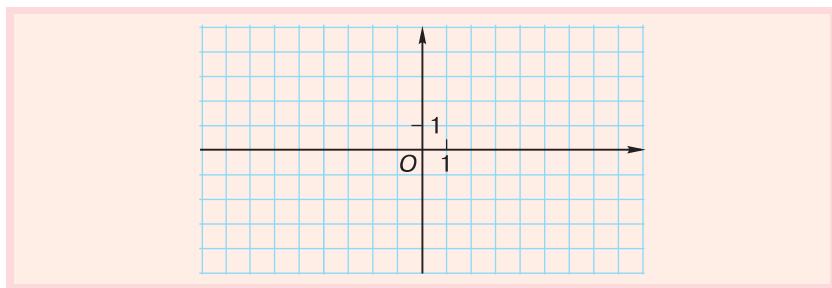
Наверное, вы заметили: положение фигуры на доске, места в зале и точки на карте определяется двумя числами (на шахматной доске вместо a, b, c, d, e, f, g, h тоже можно записать числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8). Математик сказал бы об этом так: на шахматной доске, в зрительном зале, на географической карте введена *система координат*.

На уроках математики мы будем часто использовать *прямоугольную систему координат*. Рассмотрим её подробно.

Изобразим две перпендикулярные прямые. Точку их пересечения обозначим буквой O (точка O соответствует числу 0).

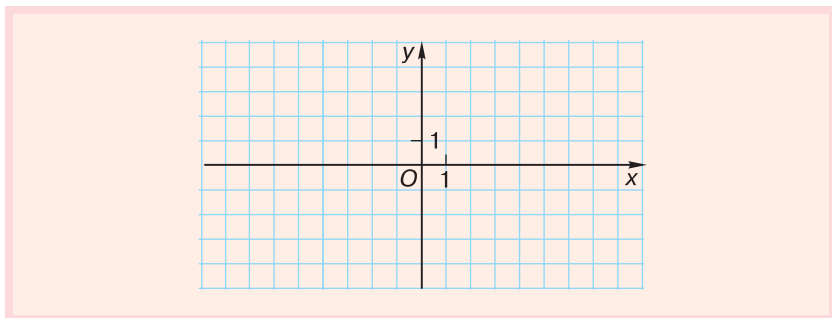


Выберем на каждой прямой положительное направление и одинаковые единичные отрезки:



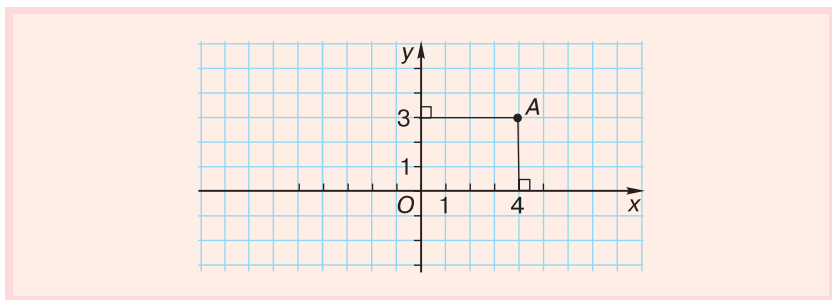
Получились две взаимно перпендикулярные координатные прямые с общим началом отсчёта. Чтобы их

различать, одну обозначим буквой x , другую буквой y . Ось Ox называют *осью абсцисс*, ось Oy — *осью ординат*.



На плоскости введена прямоугольная система координат — получилась координатная плоскость. Теперь положение любой точки плоскости можно точно определить с помощью двух чисел.

Опустим из точки A перпендикуляры на обе координатные оси. На оси абсцисс мы попали в точку, соответствующую числу 4, на оси ординат — числу 3. Числа 4 и 3 будут *координатами точки A на плоскости*.



Число 4 — *абсцисса точки A* , число 3 — *ордината точки A* .

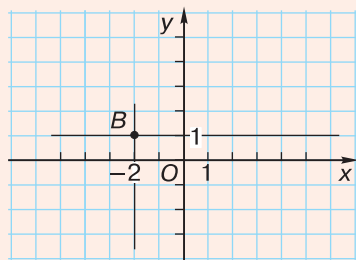
Записывается это так: $A(4; 3)$. Обратите внимание: сначала записывается абсцисса, а потом ордината.

Итак, мы определили координаты точки A . Это можно сделать для любой точки плоскости.

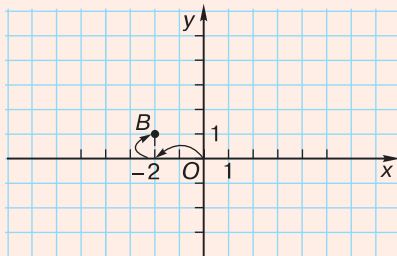
И обратно, зная координаты точки, можно отметить её на плоскости.

Отметим точку $B(-2; 1)$. Для этого:

- найдём на оси Ox точку -2 и проведём через неё прямую, перпендикулярную этой оси;
- найдём на оси Oy точку 1 и тоже проведём через неё прямую, перпендикулярную этой оси;
- отметим точку пересечения построенных прямых — это и будет точка $B(-2; 1)$.



А можно и так: чтобы отметить точку $B(-2; 1)$, «пройдем» по оси Ox от начала отсчёта влево на 2 единицы, а потом на 1 единицу вверх.



Каждой паре чисел (координат) соответствует единственная точка плоскости. И обратно: каждой точке плоскости соответствует единственная пара чисел (координат).

Подведём итоги

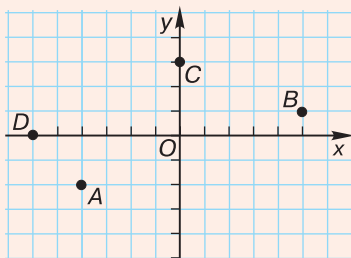
1. Если на плоскости выбраны две взаимно перпендикулярные координатные прямые с общим началом отсчёта, говорят, что на плоскости введена прямоугольная система координат.
2. Если на плоскости введена система координат, то положение любой точки плоскости однозначно определяется парой чисел — её координат.



Проверь себя



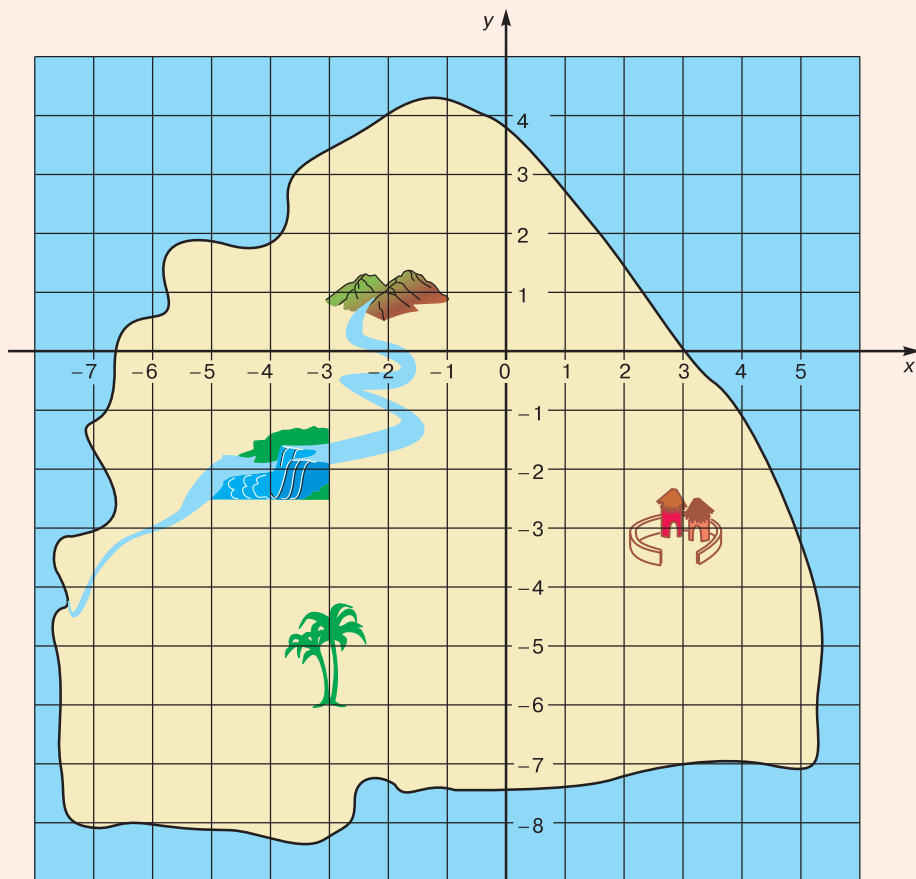
1. Запишите координаты точек:



2. Отметьте на координатной плоскости точки $A(1; -4)$, $B(-3; 2)$, $C(-5; -2)$, $D(4; 0)$, $E(0; -2)$.
3. Отметьте несколько точек с ординатой, равной 4. Что можно сказать о расположении этих точек? Как будут расположены на координатной плоскости точки с одинаковыми абсциссами? Проиллюстрируйте свой ответ примерами.

4. На острове спрятан пиратский клад. Найдена записка:

« $A(-2; 5)$, $B(-6; 1)$, $C(1; 2)$, $D(-2; -4)$. На прямой AB отметьте точку K с абсциссой -3 , на прямой CD — точку M с ординатой -2 . Середина отрезка KM отметит на карте место, где зарыт клад».



Так где же на этом острове зарыт клад?



Работаем с практикумом

Задание 1. Постройте на координатной плоскости точки $A(-8; 5)$, $B(12; 5)$, $C(12; 1)$. Соедините точки отрезками. Какая фигура у вас получилась? Достройте фигуру до прямоугольника и укажите координаты его четвёртой вершины.

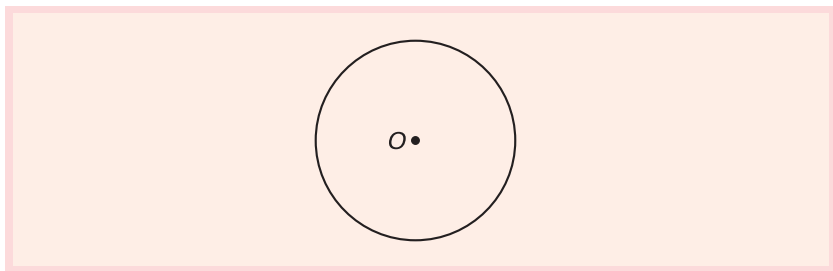
Задание 2. На координатной плоскости постройте квадрат $ABCD$, если:

- а) $A(-3; 3)$, $B(1; 3)$;
- б) $A(-3; 3)$, $B(-3; 5)$;
- в) $A(-3; 3)$ и центр квадрата, то есть точка пересечения отрезков AC и BD , совпадает с точкой $O(0; 0)$;

§ 32. Окружность. Круг

Вы уже знакомы с такими фигурами, как окружность и круг. Теперь мы рассмотрим их более подробно.

На рисунке изображена окружность и точка O . Отметьте на этой окружности несколько точек и измерьте расстояния от них до точки O .

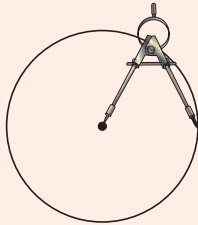


Какие результаты вы получили? Попробуйте объяснить, что такое окружность.

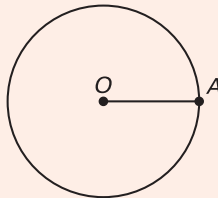
Сравните свою формулировку со следующей:

Окружность — это фигура, состоящая из всех точек плоскости, которые находятся на одинаковом расстоянии от заданной точки (центра окружности). Говорят, что все точки окружности равноудалены от центра.

Начертить окружность можно при помощи специального инструмента — *циркуля*. Отметим произвольную точку, которая будет центром окружности. Поставим ножку циркуля с иглой в эту точку, а ножкой с грифелем опишем замкнутую линию. Это и будет окружность. Действительно, расстояние между концами ножек циркуля не меняется, поэтому все точки начерченной линии будут находиться на одинаковом расстоянии от центра.

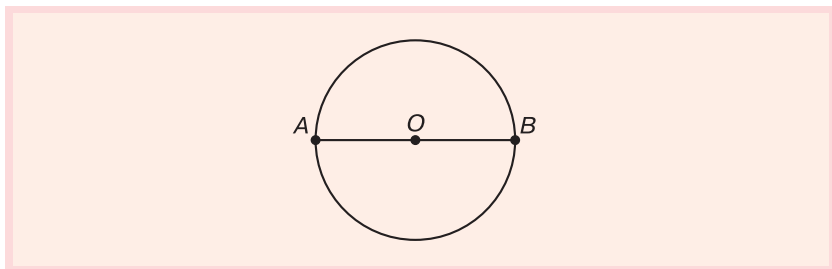


Отметим на окружности точку A и соединим её с центром O (см. рисунок). Отрезок OA называется *радиусом окружности*.

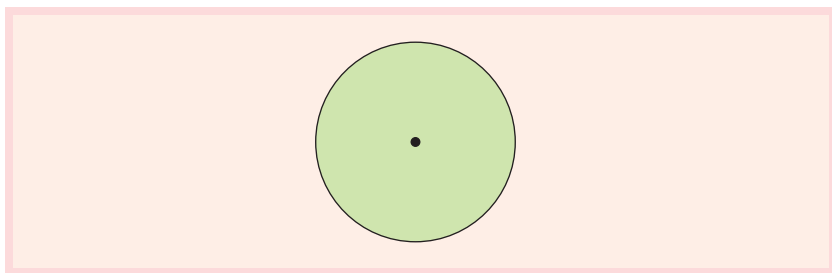




Проведём отрезок, который соединяет две точки окружности и при этом проходит через её центр. Такой отрезок называется *диаметром окружности*. Обратите внимание: диаметр состоит из двух радиусов, поэтому *диаметр окружности вдвое длиннее её радиуса*.



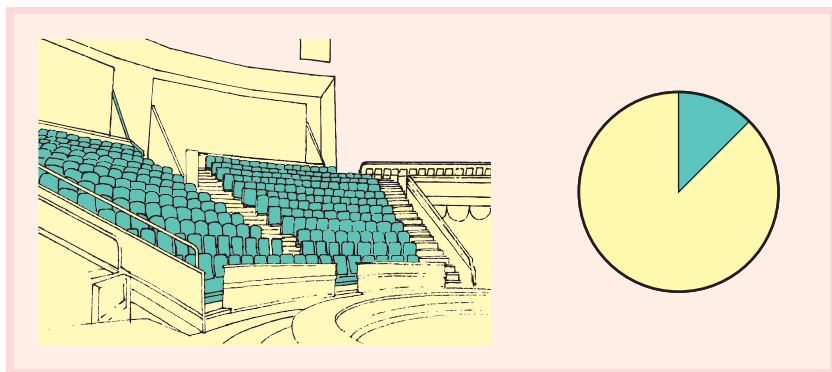
Если закрасить всю часть плоскости внутри окружности, мы изобразим *круг*.



Круг — это множество всех точек плоскости внутри окружности (включая саму окружность).

Вы, наверное, были в цирке и слышали там слово «сектор». Мы не случайно упомянули об этом сейчас. Сектор — это часть круга, ограниченная двумя радиу-

сами. Угол между этими радиусами называют углом сектора.



Кстати, и само слово «цирк» связано с кругом. Оно произошло от латинского *circus*, что означало «круг, обруч, кольцо».

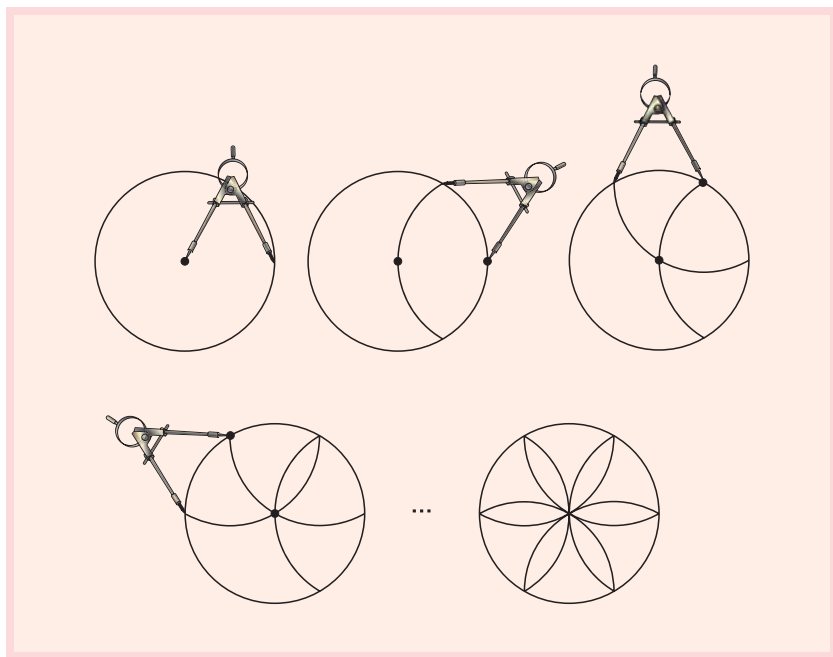
Подведём итоги

1. Окружность — это фигура, состоящая из всех точек плоскости, которые находятся на одинаковом расстоянии (равноудалены) от заданной точки (центра окружности).
2. Отрезок, соединяющий произвольную точку окружности с её центром, называется радиусом окружности.
3. Отрезок, который соединяет две точки окружности и при этом проходит через её центр, называется диаметром окружности.
4. Диаметр окружности вдвое длиннее её радиуса.
5. Круг — это множество всех точек внутри окружности (включая саму окружность).
6. Сектор — это часть круга, ограниченная двумя радиусами. Угол между этими радиусами называют углом сектора.



Проверь себя

1. При помощи циркуля постройте окружность радиусом 2 см.
2. Отметьте точки A и B так, чтобы $AB = 4$. Постройте окружность с центром в точке A радиусом 3 см и окружность с центром в точке B радиусом 2 см. Отметьте точки пересечения построенных окружностей.
3. Постройте окружность. Проведите два радиуса так, чтобы они ограничили сектор с углом в 70° .
4. На рисунке изображён процесс построения узора из дуг окружностей.



По рисункам объясните, какие действия выполнялись на каждом шаге построений. Начертите такой же узор в тетради.

§ 33. Столбчатые и круговые диаграммы

В таблице представлены результаты наблюдений за погодой в течение месяца.



Число месяца	Темпе- ратура воздуха в °С	Сила ветра в бал- лах	Осадки	Число месяца	Темпе- ратура воздуха в °С	Сила ветра в бал- лах	Осадки
1	+9	2		16	−2	2	*
2	+5	2	...	17	+2	3	
3	+3	3		18	+1	2	
4	+2	3	...	19	−9	2	*
5	+3	3	...	20	−11	4	*
6	+3	2		21	−22	2	
7	−4	2		22	−24	3	
8	−3	2	*	23	−18	0	
9	−3	2		24	−24	0	
10	−13	1	*	25	−19	0	
11	−14	1	*	26	−21	1	
12	−8	1		27	−19	2	
13	−5	1		28	−19	1	
14	−6	3		29	−9	1	
15	−8	4	*	30	−4	1	*

Примечание: ... — дождь; * — снег

Данных в таблице много. Как сделать их более наглядными? Мы рассмотрим один из способов — построение *диаграмм*.

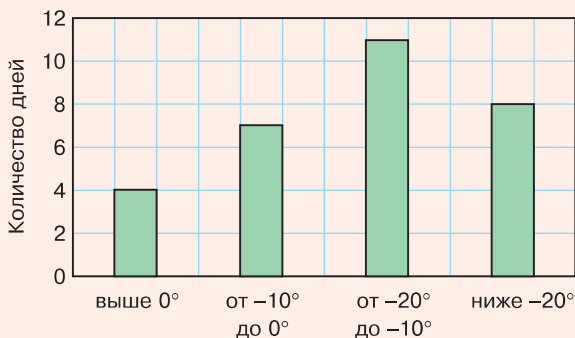
Сначала обратимся к данным о температуре воздуха:

ниже -20° — 4 дня,
от -20° до -10° — 7 дней,
от -10° до 0° — 11 дней,
выше 0° — 8 дней.

По этим данным построим *столбчатую диаграмму* — ряд прямоугольных столбиков, высоты которых пропорциональны количеству дней (ширина у всех столбиков должна быть одинаковой).

Пусть одна клетка тетради будет соответствовать 2 дням. Тогда столбики будут иметь высоту:

ниже -20° — 2 клетки,
от -20° до -10° — 3,5 клетки,
от -10° до 0° — 5,5 клеток,
выше 0° — 4 клетки.



Данные о силе ветра представим графически другим способом — построим *круговую диаграмму*.

0 баллов — 3 дня,
1 балл — 8 дней,
2 балла — 11 дней,
3 балла — 6 дней,
4 балла — 2 дня,
Всего — 30 дней.

Разделим круг на секторы, градусные меры которых относятся как $3 : 8 : 11 : 6 : 2$.

Найдём градусную меру сектора для количества дней, когда сила ветра была 0 баллов (то есть ветра не было):

круг 360° — 30 дней;

сектор x° — 3 дня.

Составим и решим пропорцию:

$$\frac{360}{x} = \frac{30}{3};$$

$$x = 36.$$

Аналогично найдём величины углов других секторов. Также можно найти соответствующие проценты от всего количества дней:

0 баллов — 3 дня — 36° ; 10%

1 балл — 8 дней — 96° ; $\approx 27\%$

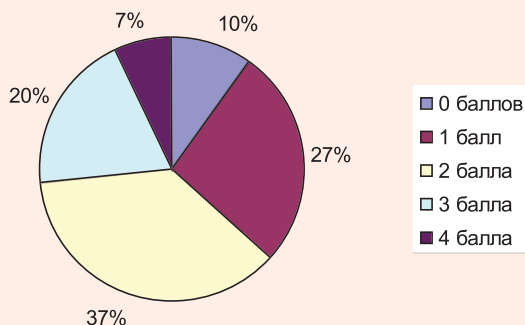
2 балла — 11 дней — 132° ; $\approx 37\%$

3 балла — 6 дней — 72° ; 20%

4 балла — 2 дня — 24° ; $\approx 7\%$

Всего — 30 дней — 360° .

Разделим круг на такие секторы. Первый радиус можно провести произвольно, а затем последовательно откладывать найденные углы. Полученные секторы лучше окрасить в разные цвета:



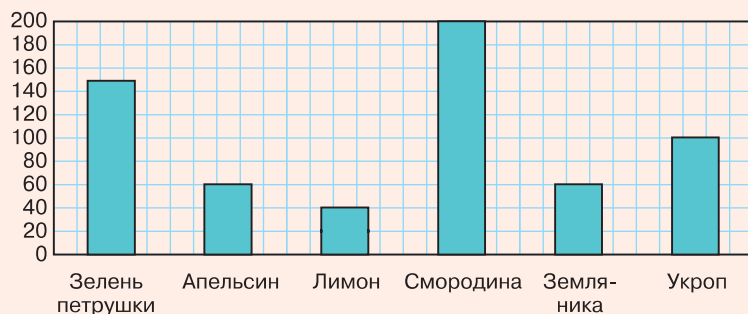
Подведём итоги

1. Диаграмма — это графическое изображение, показывающее соотношения между определёнными значениями величины.
2. Столбчатая диаграмма — это ряд прямоугольников, высоты которых пропорциональны выбранным значениям величины.
3. Круговая диаграмма — это круг, разделённый на секторы, градусные меры которых пропорциональны выбранным значениям величины.



Проверь себя

1. По данным о силе ветра, приведённым в таблице из этого параграфа, постройте столбчатую диаграмму.
2. По данным об осадках, приведённым в таблице из этого параграфа, постройте круговую диаграмму.
3. На диаграмме изображено содержание витамина С в некоторых продуктах (в мг на 100 г):



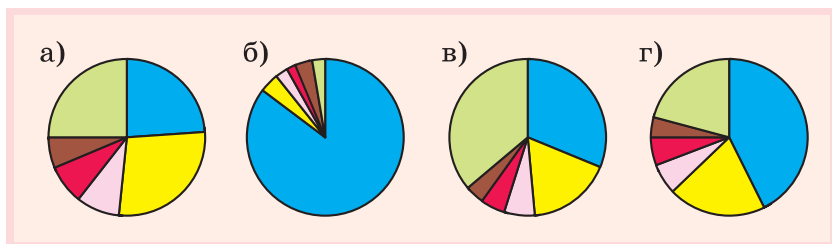
- а) В каком из этих продуктов содержание витамина С наибольшее? Наименьшее?
- б) В каких продуктах содержание витамина С больше 80 мг на 100 г?



4. Площадь континента Евразия примерно 55 005 тыс. м². В таблице приведены площади некоторых стран, расположенных на этом континенте:

Страна	Площадь территории, тыс. кв. м
Россия	17 075
Китай	9 598
Индия	3 287
Казахстан	2 725
Саудовская Аравия	2 150
Остальные страны	20 170

Выберите из изображённых ниже круговых диаграмм ту, с помощью которой можно проиллюстрировать данные из таблицы.



Объясните, почему остальные три диаграммы не соответствуют данным о площадях стран.

5. Принесите на урок книгу, журнал, газету или атлас, в котором приводится диаграмма. Расскажите, что изображено на этой диаграмме и как её можно использовать.



Работаем с практикумом

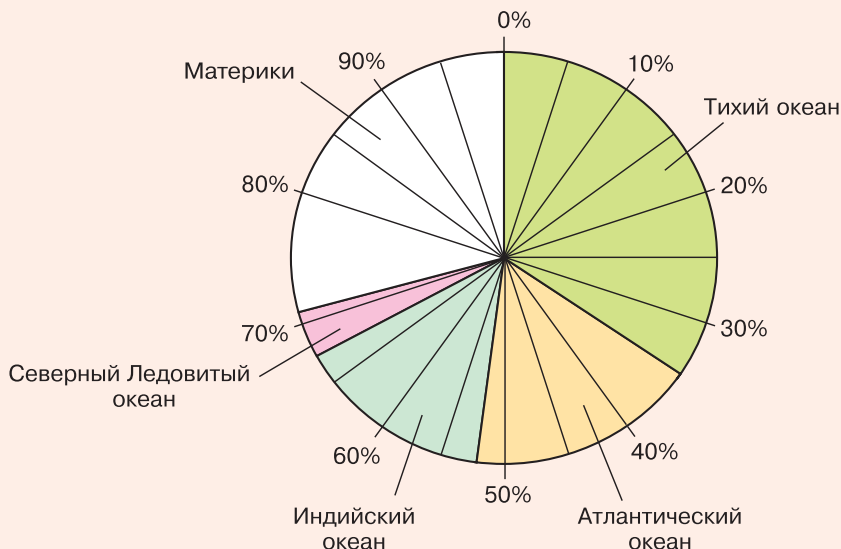


www

Задание 1. Дневной рацион школьника — 2000 килокалорий. Завтрак составляет 25% дневного рациона,

второй завтрак — 15%, обед — 40%. Сколько килокалорий составляет ужин? Составьте круговую диаграмму распределения калорий за день.

Задание 2. Рассмотрите диаграмму. 71% поверхности Земного шара занимает океан.

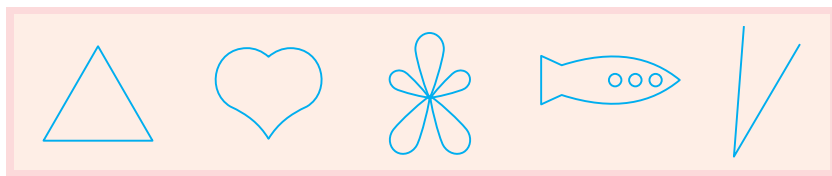


Сколько (приблизительно) процентов поверхности Земли составляет:

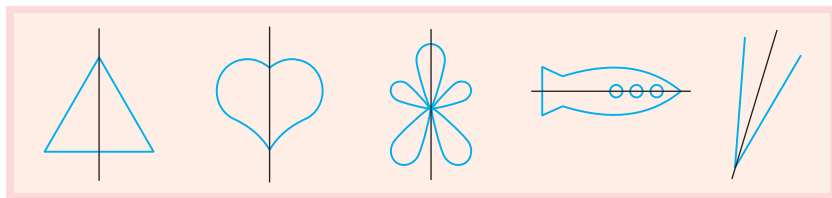
- а) Тихий океан;
- б) Атлантический океан;
- в) Индийский океан;
- г) Северный Ледовитый океан?

§ 34. Осевая симметрия

Рассмотрите внимательно фигуры, изображённые на рисунке:



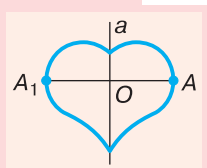
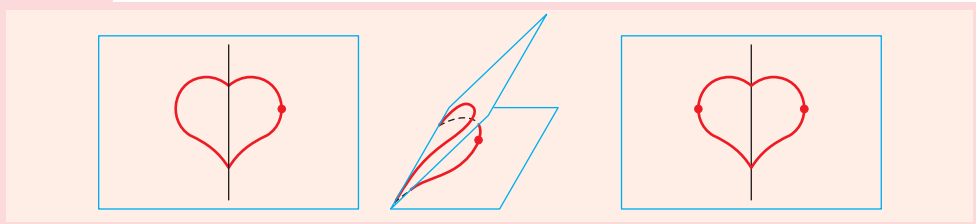
Хотя эти фигуры имеют разную форму, они обладают важной общей особенностью. Для каждой из них можно выбрать такую особую прямую, что если перегнуть изображение фигуры по этой прямой, то части фигуры, находившиеся по разные стороны от прямой, совпадут:



О каждой из этих фигур можно сказать, что она имеет *осевую симметрию*, а выделенная прямая называется *осью симметрии*. Слово «симметрия» происходит от греческого слова *συμμετρία* — «соразмерность».

(Возьмите кальку и сделайте копии всех приведённых фигур. Проверьте осевую симметричность каждой фигуры относительно выделенной прямой.)

Рассмотрим одну из фигур подробнее. Отметим на ней чернилами точку и перегнём фигуру по оси симметрии. Мы получим отпечаток отмеченной точки — точку, *симметричную ей относительно оси симметрии* (обратите внимание, что «отпечаток» также лежит на фигуре).



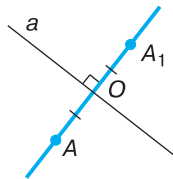
Введём обозначения: прямая a , первая точка — точка A , её «отпечаток», симметричная ей точка относительно прямой a , — точка A_1 .

Соединим обе точки отрезком. Проверьте, что отрезок AA_1 перпендикулярен прямой a .

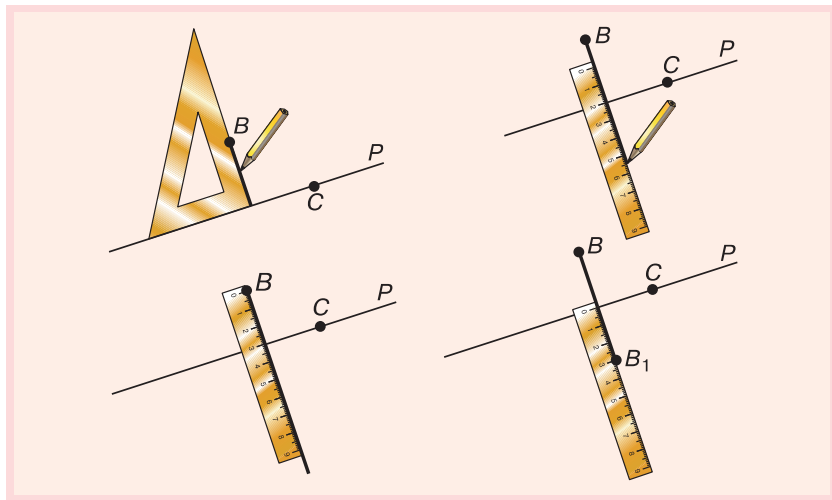
Точку пересечения отрезка AA_1 и прямой a обозначим O . Проверьте, что отрезки AO и A_1O равны.

Сформулируем более точно то, что мы узнали о симметричных точках и фигурах опытным путём.

Точки A и A_1 называются симметричными относительно прямой a , если они лежат на прямой, перпендикулярной a , по разные стороны от прямой a и отрезки AO и A_1O равны (где O — точка пересечения этой прямой и прямой a).



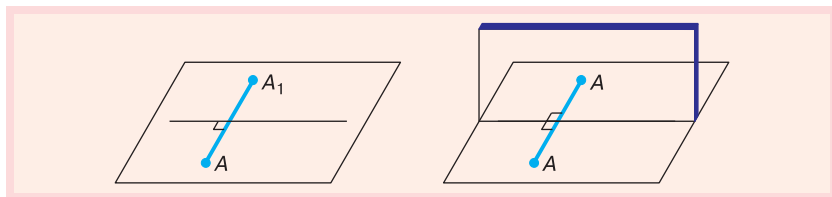
На рисунке показано, как построить точку, симметричную данной точке относительно выбранной прямой.



При этом точки прямой p считают симметричными самим себе. Например, точка C симметрична сама себе относительно прямой p .

Представьте себе, что мы изобразили точку A_1 , симметричную точке A относительно прямой, а затем поставили на ось симметрии зеркало.

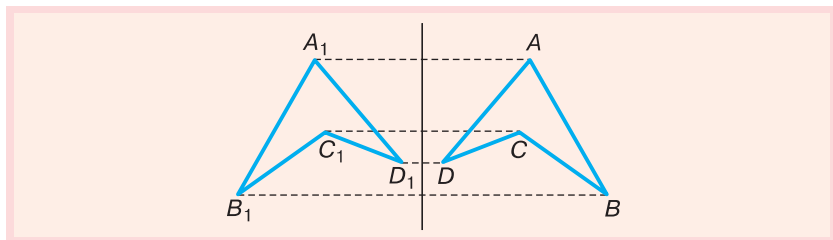
(Вы можете проделать такой эксперимент самостоятельно):



В зеркале появилось отражение точки A , причём мы видим его на том же месте, где должна была бы находиться симметричная точка A_1 . То есть осевая

симметрия — это как будто «отражение» точек и других фигур в «зеркале-прямой».

Для отрезка симметричной ему фигурой относительно любой прямой будет равный ему отрезок. Благодаря этому можно легко «отразить» многоугольник симметрично относительно любой прямой — достаточно построить точки, симметричные его вершинам, и соединить их соответствующими отрезками:

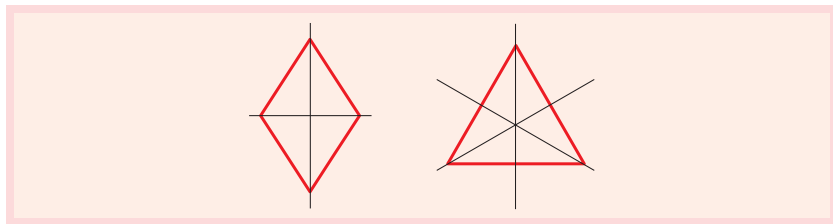


Опираясь на определение симметричных точек, сформулируем определение фигуры, обладающей осевой симметрией.

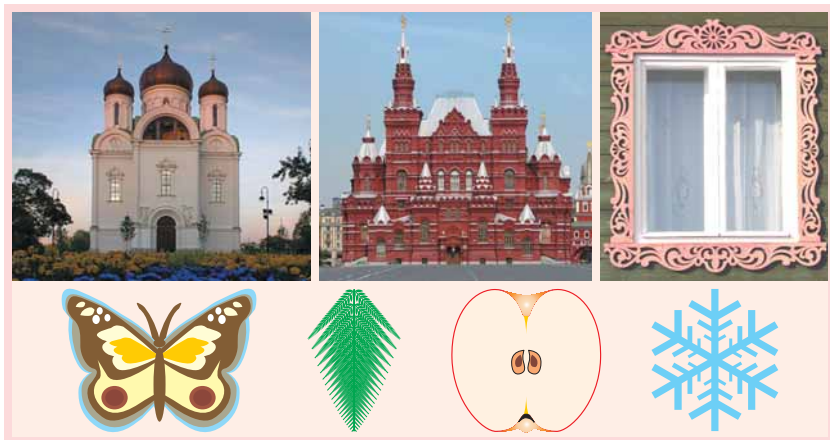


Фигура имеет осевую симметрию относительно прямой a , если для каждой точки этой фигуры симметричная ей точка относительно прямой a также принадлежит этой фигуре. В этом случае прямая a называется осью симметрии фигуры.

Фигура может иметь и несколько осей симметрии:



Осевая симметрия часто встречается в природе и используется в архитектуре:



Подведём итоги

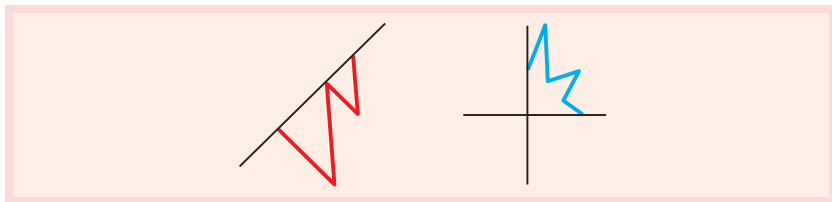
1. Точки A и A_1 называются симметричными относительно прямой a , если они лежат на прямой, перпендикулярной a , по разные стороны от прямой a и $AO = A_1O$ (где O — точка пересечения прямой AA_1 и прямой a).
2. Фигура обладает осевой симметрией относительно прямой a , если для каждой точки этой фигуры симметричная ей точка относительно прямой a также принадлежит этой фигуре. В этом случае прямая a называется осью симметрии фигуры.

Проверь себя

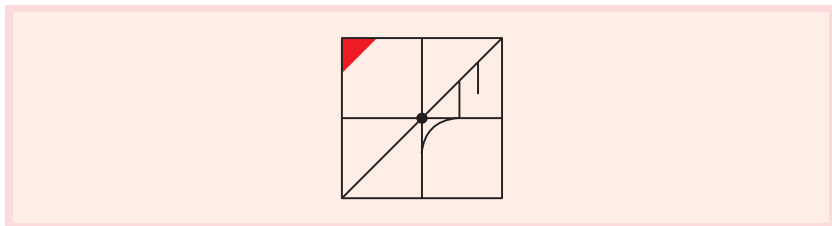


1. Нарисуйте 5 реальных предметов, изображение которых на бумаге будет иметь ось симметрии. В каждом случае постройте ось симметрии.
2. Складывая лист бумаги нужное число раз, вырежьте несколько фигур, имеющих
 - а) одну;
 - б) две;
 - в) четыре оси симметрии.

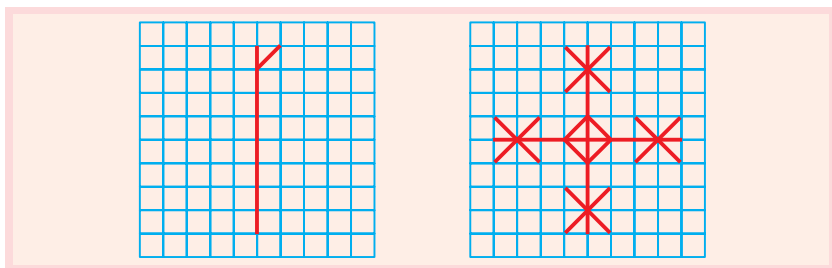
3. Восстановите изображения, если известно, что они были симметричны относительно выделенных прямых.



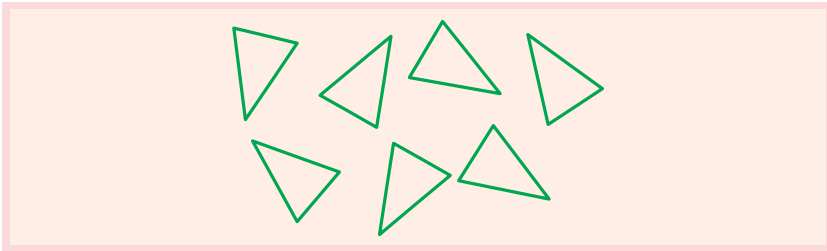
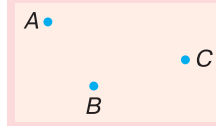
4. Дополните фигуру так, чтобы она имела:
а) одну, б) две, в) четыре оси симметрии.



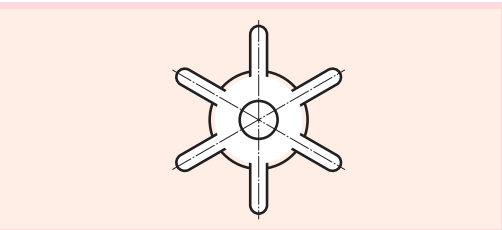
5. На левом рисунке вы видите фрагмент некоторой фигуры. Представьте, что он выполнен особой, невысыхающей краской. Сколько раз нужно перегнуть исходный рисунок, чтобы получить всю фигуру (правый рисунок)? Нарисуйте последовательные изменения рисунка после каждого перегибания, указывая при этом каждую прямую перегиба.



6. Известно, что точки A и B симметричны относительно некоторой прямой. Постройте точку, симметричную точке C относительно этой же прямой.
7. Найдите на рисунке две пары треугольников, симметричных друг другу относительно некоторой прямой, в каждом случае постройте ось симметрии.



8. Написание слова ПОП имеет вертикальную ось симметрии, а написание слова СОК — горизонтальную ось симметрии. Как нужно написать слово НАТАША, чтобы его запись тоже имела ось симметрии?
9. Назовите фигуры, которые имеют:
- ровно 4 оси симметрии;
 - бесконечно много осей симметрии.
10. Рассмотрите строение водного животного — пресноводной гидры. Её изображение (вид сверху) имеет несколько осей симметрии. Какие преимущества даёт гидре симметричное расположение её щупалец?



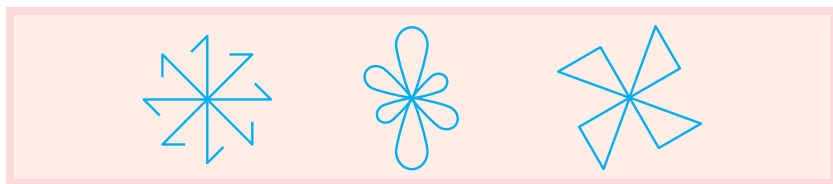


11. Составьте фотоальбом или презентацию на одну из тем

- «Осевая симметрия в природе»,
- «Осевая симметрия в архитектуре»,
- «Осевая симметрия в технике».

§ 35. Центральная симметрия

Есть ли у какой-нибудь их изображённых фигур ось симметрии?

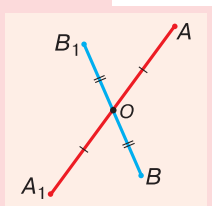


Легко убедиться, что нет. Однако они всё же обладают симметрией, только другого вида. О каждой из этих фигур можно сказать, что она имеет *центральную симметрию*.

Рассмотрим центральную симметричность двух точек.



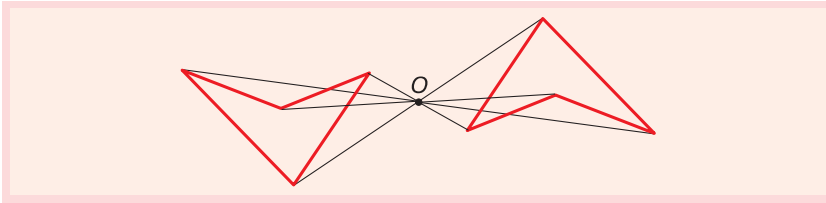
Точки A_1 и A называется симметричными относительно точки O , если точка O является серединой отрезка AA_1 . В этом случае точка O называется центром симметрии.



На рисунке точка A_1 симметрична точке A относительно точки O , а точка B_1 симметрична точке B относительно точки O (одинаковым количеством чёрточек помечены отрезки равной длины). При этом считается, что точка O симметрична самой себе.

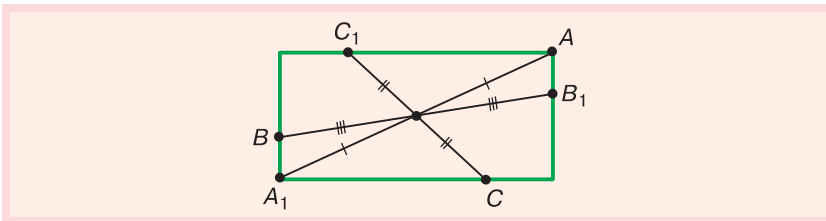
В предыдущем параграфе мы говорили, что осевую симметрию можно представить как «отражение» точек и других фигур в «зеркале-прямой». Тогда о центральной симметрии можно сказать, что это «отражение» точек и других фигур в «зеркале-точке».

Для отрезка симметричной ему фигурой относительно любой точки будет равный ему отрезок. Благодаря этому легко «отразить» многоугольник симметрично относительно точки — достаточно построить точки, центрально симметричные его вершинам, и соединить их соответствующими отрезками:



Опираясь на определение центрально симметричных точек, сформулируем определение фигуры, обладающей центральной симметрией.

Фигура имеет центральную симметрию относительно точки O , если для каждой точки этой фигуры симметричная ей точка относительно точки O также принадлежит этой фигуре. В этом случае точка O называется центром симметрии фигуры.



(Возьмите кальку и сделайте копию одной из приведённых в начале параграфа фигур. Проверьте для нескольких точек этой фигуры, что центрально симметричные им точки также принадлежат фигуре.)

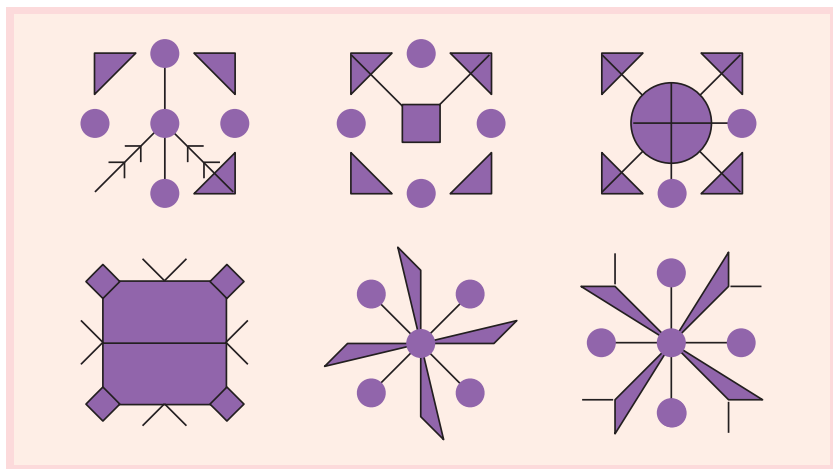
Подведём итоги

1. Точки A_1 и A называются симметричными относительно точки O , если точка O является серединой отрезка AA_1 . В этом случае точка O называется центром симметрии.
2. Фигура имеет центральную симметрию относительно точки O , если для каждой точки этой фигуры симметричная ей точка относительно точки O также принадлежит этой фигуре. В этом случае точка O называется центром симметрии фигуры.

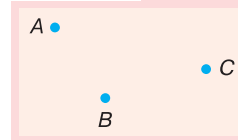
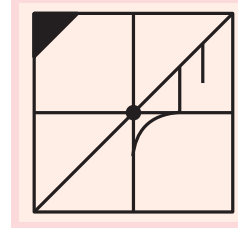


Проверь себя

1. Какие из приведённых изображений имеют:
 - а) центр симметрии;
 - б) и центр, и ось симметрии?



2. Постройте фигуру так, чтобы она имела центр симметрии.
3. Выпишите все заглавные печатные буквы русского и латинского алфавитов, имеющие центр симметрии.
4. Изобразите отрезок AB . Постройте его с помощью отрезков AP и BC до фигуры, имеющей
 - а) центр симметрии; б) ось симметрии.
5. Начертите треугольник ABC и постройте симметричный ему относительно:
 - а) вершины A ; б) середины стороны BC .
6. Даны точки A , B и C . Известно, что точки A и B симметричны относительно некоторого центра симметрии. Постройте точку, симметричную точке C относительно того же центра.
7. Нарисуйте узор для ковра так, чтобы он обладал центральной симметрией и чтобы не менее пяти его фрагментов, взятых по отдельности, также имели бы центр симметрии.
8. Двое играют в такую игру: на поверхности круглого стола игроки по очереди выкладывают шашки одинакового размера. Проигрывает тот, кто первым не сможет найти на столе место для своей шашки. Найдите выигрышную стратегию для того, кто начинает первым (то есть опишите, как ему нужно выкладывать свои шашки, чтобы обязательно выиграть).



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЯРМАРКА

Дорогие друзья!

Вы уже многое знаете о числах, арифметических действиях, числовых выражениях, фигурах, умеете использовать буквенные выражения и решать уравнения. Вы научились решать самые разные задачи и не боитесь иметь дело даже с необычными заданиями. Вы можете оценить свои знания и выделить те вопросы, на которые у вас пока ещё нет ответа.

Вы хорошо потрудились! Мы предлагаем в завершение вашей работы провести математическую Ярмарку. Возможный сценарий Ярмарки описан в учебной книге под названием «Рациональные числа». Для организации этого праздника вы можете использовать материалы из учебных книг и рабочих тетрадей. Найдите интересные задания в дополнительной литературе и в Интернете, а также придумайте свои задания для предстоящих интеллектуальных состязаний.

Желаем успеха!

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ

Ответы к заданиям § 1

1. а) 0; б) не имеет смысла; в) 0; г) не имеет смысла.
2. 2) а) $-2,55$; б) $-3,9$. 3. а) 21; б) -50 ; в) 150.

Ответы к заданиям § 2

1. б). 2. а) 10; б) 1) 0; 2) не имеет смысла; 3) не имеет смысла; в) 0; 0; 0; не имеет смысла; 2.

Ответы к заданиям § 3

1. а) x ; б) $-10b$; в) $3b - 2a$; г) $6 - 4a$; д) $3a$; е) $-4,7a$;
ж) $0,2x + 5$; з) $6a - 2$. 2. а) $+, +$; б) $-, \cdot$; в) $-, -$; г) $+, -$;
д) $\cdot, +$; е) $-, +$. 3. а) $5x$; б) $-3x$; в) $-5x$; г) $1 - 5x$.

Ответы к заданиям § 4

1. 1) $-2a - b$; 2) -12 . 2. 1) $-(5x - 4) = -5x + 4$; 2) $-2(x + 3) = -2x - 6$; 3) $-2(3x - 2) = -6x + 4$; 4) $-(-5 - x) + 2(3 - 4x) = 5 + x + 6 - 8x$. 3. а) $(-109) + (-32) + (-33) + 117 + 0$; б) $(-109) - 32 - 33 - (-117) - 0$. 4. а) 124; б) $-43,2$; в) 0.
5. I — Г, II — В, III — Б, IV — Д, V — А, VI — Е.

Ответы к заданиям § 5

1. б) да, 27); да, 26). в) одинаковые корни имеют уравнения: 1), 4) и 24) — корень 4; 5), 9) и 10) — корень 3; 7), 12), 13), 16) и 25) — корень 2; 15) и 19) — корень 1; 8) и 18) — корень -4 ; противоположные корни имеют следующие пары уравнений: 1) и 18); 19) и 20); из уравнений, имеющих единственное решение, наибольший модуль имеет корень уравнения 22); наибольший отрицательный корень имеет уравнение 20).
2. 1) 0; 2) 4; 3) 5; 4) -8 .

Ответы к заданиям § 6

1. г) Число должно делиться на 2 и на 3, например, 102; 510; 1002; 2334; е) Число должно делиться на 3 и на 4, например, 204; 348; 5100; 1020; з) Число должно делиться на 2 и на 9, например, 324; 216; 1170; 1908. 2. а) например, 1, 2, 3, 5, 6; б) например, 1, 2, -2 , 5, -10 .
3. а) 1540; 86; 25 000; 2144; 88; б) 30 591; в) 1540; 25 000; г) 25 000.

Ответы к заданиям § 7

1. 1) а) например, 123; б) например, 125; 90 чисел; 2) нет.
2. Нечётное число не может делиться на чётное. Чётное число может делиться на нечётное; например, $126 : 3 = 42$.
3. В первом примере должно получиться чётное число, так как складывали чётные числа. Во втором примере должно получиться нечётное число, так как сумма чётного и нечётного чисел есть число нечётное.

Ответы к заданиям § 8

1. а) например, 7; любое число, кратное 7; б) любое число; в) любое число, кратное 11; г) любое число, кратное 9; д) любое число.
2. Нет, оно делится на данное двузначное число.
3. *Подсказка.* Общий вид двух последовательных нечётных чисел: $2n-1$ и $2n+1$.
4. $3n$, $6t$, $70k$.

Ответы к заданиям § 9

1. а) 25; б) 24; в) 24.
2. Да. *Подсказка.* Делимость натурального числа на 4 зависит от делимости на 4 числа вида $\overline{bc} = 10b + c$, где c — последняя цифра данного числа, а b — предпоследняя цифра этого же числа. Учитывая, что сумма последней цифры и удвоенной предпоследней равна $2b + c$, запишем: $\overline{bc} = 8b + (2b + c)$. Поэтому, если $\overline{bc}$ делится на 4, то и число $2b + c$ будет делиться на 4, и наоборот.
3. Число делится на 8, если число, записанное последними тремя цифрами, делится на 8 (докажите). Число 444 на 8 не делится, значит, и число, записанное тремя или более четвёрками, на 8 не делится. Числа 4 и 44 также не делятся на 8.

Ответы к заданиям § 10

1. а), б).
2. Например, 1, 2, 3; не зависит. а) например, 1, 2, 6; не зависит; б) Можно подобрать цифры, от перестановки которых делимость числа на 4 не зависит; например, 4, 8, 0. В общем случае делимость числа на 4 будет зависеть от того, как расставить цифры; например, 124 делится на 4, а 142 не делится на 4.
3. 1) На первом рисунке числа разделены на чётные и нечётные. На втором рисунке числа разделены на множества чисел в зависимости от того, какой остаток при делении на 3 даёт

данное число. 2) На первом рисунке число 9020 попадёт в класс чётных чисел ($2n$); на втором рисунке — в класс чисел, дающих остаток 2 при делении на 3 ($3n + 2$). На первом рисунке число 327 попадёт в класс нечётных чисел ($2n + 1$); на втором рисунке — в класс чисел, нацело делящихся на 3 ($3n$). На первом рисунке число 1321 попадёт в класс нечётных чисел ($2n + 1$); на втором рисунке — в класс чисел, дающих остаток 1 при делении на 3 ($3n + 1$).
4. 14 580.

Ответы к заданиям § 11

1. $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$.
2. а) 35; б) 2; в) 46. 3. 1) 5, 6, 7; 2) 3, 5, 7.

Ответы к заданиям § 12

1. 2) Нет, a может быть равно 3, а 3 — простое число.
2. Первый столбик: а); г); д); е); ж); второй столбик: б); в); з); и); к).

Ответы к заданиям § 13

1. а) 3^2 ; б) $11 \cdot 17$. 2. 1) 21; 2) 2; 3) 1. 3. 20 букетов; 3 белые розы, 4 жёлтые розы.

Ответы к заданиям § 14

1. а) $2 \cdot 5 \cdot 7$; б) $3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13$; в) $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$; г) $2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$; д) $3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$; е) $2 \cdot 3 \cdot 13$; ж) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. 2. Через 30 дней (во всех случаях). 3. 2) 1; 3) да.

Ответы к заданиям § 15

1. 1) а) $\frac{2}{3}$ м; б) $\frac{5}{4}$ яблока; в) $\frac{3}{5}$ шоколадки. 2. 1) а) $\frac{5}{7}$, б) $\frac{5}{3}$, в) $\frac{2}{100}$, г) $\frac{4}{1}$, д) $\frac{32}{40}$, е) $\frac{100}{2}$, ж) $\frac{15}{5}$. 3. а) $\frac{9}{27}$; б) $\frac{2}{9}$; в) $\frac{4}{16}$; г) $\frac{4}{16}$.

Ответы к заданиям § 16

1. 2) 3 точки. 2. а) $\frac{4}{5}$; б) $\frac{3}{20}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $\frac{3}{10000}$; д) $\frac{9}{25}$; е) $\frac{3}{4}$.
3. а) $\frac{8}{12}$; $\frac{9}{12}$; $\frac{10}{12}$; б) $\frac{400}{240}$; $\frac{200}{240}$; $\frac{90}{240}$; $\frac{16}{240}$.

Ответы к заданиям § 17

1. а) $\frac{76}{105}$; б) $\frac{13}{11}$; в) $2\frac{5}{9}$; г) $\frac{161}{144}$; д) $\frac{49}{24}$; е) $2\frac{13}{50}$.
2. а) $0, (3) = \frac{3}{9} < \frac{7}{20} = 0,35$; б) $0, (857142) = \frac{6}{7} > 0,84$

Ответы к заданиям

в) $2,255 < 2\frac{2}{7} = 2, (285714)$; г) $2, (47619) = \frac{43}{21} < \frac{401}{142} \approx 2,824$; д) $0,6(3) < \frac{45}{70} = 0,6(428571)$; е) $2,1(6) = \frac{13}{6} < 2,2$.
 3. а) $1\frac{6}{7} < 2$; б) $10\frac{1}{3} > \frac{81}{88}$; в) $-13,5 < -12\frac{1}{3}$; г) $3\frac{3}{4} > \frac{12}{13}$; д) $5\frac{1}{8} < 5\frac{3}{8}$; е) $3\frac{1}{3} > 3\frac{6}{37}$.

Ответы к заданиям § 18

1. а) 3; б) 7,5; в) $\frac{4}{3}$; г) 3,2; д) $\frac{1}{7}$; е) $-10\frac{1}{4}$.

2.	натуральное число	целое число	дробное число	рациональное число
7	+	+		+
-2		+		+
12,7			+	+
-0,05			+	+
0		+		+
199	+	+		+
$\frac{3}{4}$			+	+
$-\frac{77}{11}$			+	+
0,(3)			+	+
$\frac{8}{11}$			+	+

3. 1) а) например, $\frac{6}{12}$; б) например, $\frac{11}{24}$; 2) 3. Между дробями $\frac{5}{12}$ и $\frac{6}{12}$ нельзя найти дроби со знаменателями 2; 3; 4; 5; 6; но можно найти дроби со знаменателями 9; 15 и 18: $\frac{4}{9} = \frac{8}{18}$, $\frac{7}{15}$. Между дробями $\frac{1}{18}$ и $\frac{1}{12}$ нельзя найти дроби со знаменателями 9 и 10; но можно найти дроби со знаменателем 30: $\frac{2}{30}$.

Ответы к заданиям § 19

1. а) $\frac{3}{8}$; $\frac{9}{4}$; б) $\frac{9}{4}$ м; в) $\frac{1}{2}$ дм². 2. а) например, $\frac{7}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{3}$; $1\frac{3}{8} = \frac{11}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{4}$; $\frac{17}{24} = \frac{17}{12} \cdot \frac{1}{2}$; $\frac{8}{12} = \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}$; б) например, $\frac{7}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{3}$; $1\frac{3}{8} = \frac{11}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{4}$; $-\frac{17}{24} = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{17}{12}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$; $\frac{8}{12} = \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}$. 3. 1) а) $\frac{1}{10}$ км²; б) 125 м, 800 м, 100 000 м²; в) $\frac{25}{256}$ км² < $\frac{1}{10}$ км²; 100 000 м² > 94 500 м²; 2) а) 9; б) $2\frac{1}{4}$; в) $\frac{9}{49}$ г) $\frac{4}{25}$.

Ответы к заданиям § 20

1. а) $\left(\frac{7}{5} \cdot \frac{5}{4}\right) \cdot 9 = 15\frac{3}{4}$; б) $\left(\frac{8}{21} \cdot \frac{21}{8}\right) \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{9}$; в) $\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3}\right) \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$; г) $\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{13}{14} = \frac{13}{14}$; д) $\left(\frac{8}{9} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)\right) \cdot \frac{7}{15} = -\frac{14}{45}$; е) $\left(\frac{12}{25} \cdot \frac{5}{4}\right) \cdot \frac{8}{11} = \frac{24}{55}$; ж) 0; з) $\left(\frac{8}{5} \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{4}{25}$; и) $\left(-\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)\right) \cdot \frac{6}{5} = \frac{6}{5}$; к) $\left(\frac{13}{17} \cdot \frac{34}{39}\right) \cdot \frac{7}{15} = \frac{14}{45}$; л) $\left((-6) \cdot \left(-\frac{49}{12}\right)\right) \cdot \left(-\frac{62}{7}\right) = -217$; м) $\frac{25}{4} \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) \cdot (-8) = 70$.
2. а) $\frac{4}{15}$; б) $13\frac{1}{3}$; в) $-\frac{6}{17}$; г) 11; д) $-\frac{1}{6}$; е) 3,2; ж) 6; з) -3,84; и) $5\frac{5}{8}$; к) $-5\frac{15}{32}$; л) $\frac{1}{5}$; м) $-2\frac{2}{5}$. Ответы на вопросы: да; нет; да. 3. а) <; б) <; в) <; г) <.

Ответы к заданиям § 21

1. Ошибки: а), б), в). 2. 2) а) ... меньше 1; б) ... делитель равен 1. 3. $1\frac{1}{2}$.

Ответы к заданиям § 22

1. 1) $\frac{2}{9}$; 2) 16 карандашей; 3) 36 карандашей; а) умножение; б) деление. 4. $\frac{1}{6}$; а) 30 минут; б) 20 минут; в) 12 минут; г) 45 минут.

Ответы к заданиям § 23

1. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $5\frac{1}{7}$; 3) $1\frac{7}{12}$; 4) $\frac{1}{3}$; 5) $2\frac{1}{2}$; 6) $2\frac{16}{27}$; 7) $1\frac{1}{2}$; 8) $1\frac{1}{18}$; 9) $1\frac{1}{4}$; 10) $\frac{1}{2}$; 11) $1\frac{2}{5}$; 12) $1\frac{19}{28}$; 13) $\frac{23}{30}$; 14) $\frac{79}{111}$; 15) $1\frac{211}{420}$; 16) $\frac{2}{9}$; 17) $\frac{215}{288}$; 18) $\frac{5}{6}$; 19) $\frac{71}{448}$; 20) $1\frac{217}{250}$.
2. 1) 1; 2) 2; 3) 2; 4) 0; 5) 2; 6) -3; 7) 5; 8) 208. Нет.
3. 20 ведер.

Ответы к заданиям § 24

1. 2), 3), 4). 3. для $\frac{3}{4}$: а) $\frac{1}{4}$, б) $-1\frac{3}{4}$, в) $-\frac{3}{4}$, г) $1\frac{1}{4}$; для $-\frac{35}{36}$: а) $1\frac{35}{36}$, б) $-\frac{1}{36}$, в) $\frac{35}{36}$, г) $2\frac{35}{36}$; для $\frac{5}{4}$: а) $-\frac{1}{4}$, б) $-2\frac{1}{4}$, в) $-\frac{5}{4}$, г) $\frac{3}{4}$; для -1: а) 2, б) 0, в) 1, г) 3; для $-\frac{1}{2}$: а) $1\frac{1}{2}$, б) $-\frac{1}{2}$, в) $\frac{1}{2}$, г) $2\frac{1}{2}$; для 1: а) 0, б) -2, в) -1, г) 1; для $\frac{13}{20}$: а) $\frac{7}{20}$, б) $-1\frac{13}{20}$, в) $-\frac{13}{20}$, г) $1\frac{7}{20}$;

Ответы к заданиям

для 0: а) 1, б) -1 , в) 0, г) 2. 4. $7\frac{2}{15}$ дм; $10\frac{1}{10}$ дм.
5. да, увеличилось на $2\frac{1}{20}$ л.

Ответы к заданиям § 25

1. 1) $\frac{7}{8}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) -13 ; 4) 5; 5) 1; 6) $11\frac{2}{3}$; 7) -20 ; 8) -18 .
2. $8\frac{1}{3}$. 3. а) $<$; б) $<$; в) $>$; г) $>$; д) $>$.

Ответы к заданиям § 26

1. $1 : 40$; $\frac{7}{40}$. 2. $9 : 1$; $4 : 25$. 3. а) 63 и 27; б) 63 и 27; в) 35 и 15; г) 49 и 21; д) 112 и 48.

Ответы к заданиям § 27

1. $d = 3,9$ см. 2. Ответы на все вопросы — да. 3. 2820 км.

Ответы к заданиям § 28

1. а) 5 см; б) 2,5 см; в) 7,5 см; г) 4 см; д) 1 см; е) 5 мм; ж) 10 см; з) 12 см. 2. 1) *горох*: а) 0,16; б) $\frac{4}{25}$; в) 16%;
овёс: а) 0,1; б) $\frac{1}{10}$; в) 10%; *рожь*: а) 0,17; б) $\frac{17}{100}$;
в) 17%; *пары*: а) 0,3; б) $\frac{3}{10}$; в) 30%; *пшеница*: а) 0,27;
б) $\frac{27}{100}$; в) 27%; 2) 62,5%. 3. 50%; 1,5625%. 4. в), г), д).

Ответы к заданиям § 29

1. 1) 192 пары; 2) 72 пары. 2. 1) на 50%; 2) 200%, на 100%. 3. 1) 755,55 р.; на 3,5%; 2) на 20%.

Ответы к заданиям § 31

1. $D(-8; 1)$. 2. а) $C(1; 7)$, $D(-3; 7)$ или $C(1; -1)$, $D(-3; -1)$;
б) $C(-1; 5)$, $D(-1; 3)$ или $C(-5; 5)$, $D(-5; 3)$; в) $B(3; 3)$,
 $C(3; -3)$, $D(-3; -3)$ или $D(3; 3)$, $C(3; -3)$, $B(-3; -3)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Обращение к читателю.....	3
Глава 1. Повторение.....	5
§ 1. Действия с целыми числами и десятичными дробями.....	5
Десятичные дроби (положительные).....	5
Положительные и отрицательные числа.....	7
§ 2. Буквенные выражения, уравнения.....	10
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ.....	15
Глава 2. Решение уравнений.....	16
§ 3. Приведение подобных слагаемых.....	16
§ 4. Раскрытие скобок.....	21
§ 5. Решение уравнений.....	26
ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ.....	33
Глава 3. Делимость целых чисел.....	34
§ 6. Деление нацело на множестве целых чисел...	34
§ 7. Признаки делимости.....	38
§ 8. Делимость произведения.....	45
§ 9. Делимость суммы.....	48
§ 10. Признаки делимости на 3 и 9.....	53
§ 11. Разложение натурального числа на простые множители.....	57
§ 12. Простые числа.....	63
Глава 4. НОД и НОК.....	68
§ 13. Наибольший общий делитель.....	68
§ 14. Наименьшее общее кратное.....	73
Проверьте свои знания, ответив на вопросы.....	79
РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА.....	81
Глава 5. Обыкновенные дроби.....	82
§ 15. Повторение: понятие обыкновенной дроби.....	82
§ 16. Основное свойство обыкновенной дроби. Со- кращение дробей.....	86

Оглавление

§ 17. Сравнение обыкновенных дробей	91
§ 18. Рациональные числа	97
Глава 6. Умножение и деление рациональных чисел	103
§ 19. Умножение обыкновенных дробей. Нахождение части от числа	103
§ 20. Умножение рациональных чисел	108
§ 21. Деление обыкновенных дробей. Различные случаи деления рациональных чисел	114
§ 22. Нахождение числа по его части	118
Глава 7. Сложение и вычитание рациональных чисел	123
§ 23. Сложение и вычитание обыкновенных дробей.	123
§ 24. Различные случаи сложения и вычитания рациональных чисел	129
§ 25. Распределительный закон умножения на множестве рациональных чисел	135
Глава 8. Отношения. Пропорции. Проценты	139
§ 26. Отношение чисел. Деление числа в данном отношении	139
§ 27. Пропорция	143
§ 28. Проценты	149
§ 29. Задачи на проценты	153
Проверьте свои знания, ответив на вопросы	157
СИСТЕМА КООРДИНАТ. ДИАГРАММЫ. СИММЕТРИЯ .	159
Глава 9. Система координат. Диаграммы	160
§ 30. Перпендикулярные и параллельные прямые ..	160
§ 31. Прямоугольная система координат	164
§ 32. Окружность. Круг	170
§ 33. Столбчатые и круговые диаграммы	175
Глава 10. Симметрия	181
§ 34. Осевая симметрия	181
§ 35. Центральная симметрия	188
Математическая ярмарка	192
Ответы к заданиям	193